This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

FOREIGN
DISSERTATION
34789

B2 627344

UC-NRLF
B 2 627 344

Recherches

sur les

Fonctions Inverses des Fonctions Méromorphes

par

Felix Iversen.

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Helsingfors et soutenue publiquement le 9 septembre 1914, à 10 heures du matin.

LIBRARY
SEP 22 1952
UNIVERSITY OF CALIFORNIA

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Helsingfors 1914,
Imprimerie de la Société de Littérature Finnoise.

Digitized by Google

Digitized by Google

Je désire exprimer ici à mon maître M. le professeur Ernst Lindelöf toute ma reconnaissance pour les précieux conseils qu'il m'a donnés au cours de mon travail, et pour l'intérêt qu'il n'a cessé de manifester à l'égard de mes recherches.

L'auteur.

Digitized by Google

Digitized by Google

I. Définition de la fonction inverse.

1. Soit $w = f(z)$ une fonction méromorphe de la variable complexe z. Cette fonction peut être représentée dans tout le plan par le quotient de deux fonctions entières

$$w = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}, \tag{1}$$

qu'on peut supposer sans zéros communs et dont l'une au plus se réduit à un polynome.

Soit z_0 un point où la dérivée $f'(z)$ de la fonction méromorphe est finie et différente de zéro. En vertu de la relation

$$w = f(z), \tag{2}$$

à ce point correspond un point w_0 à distance finie. D'après la théorie des fonctions implicites, on peut décrire des points z_0 et w_0 comme centres, dans les plans respectifs des z et des w, des cercles γ_0 et c_0 tels que, pour toute valeur w contenue dans c_0, l'équation (2) admette une racine unique z comprise dans γ_0. Dans l'intérieur du cercle c_0 cette racine est représentée par une série entière convergente [1])

$$z = z_0 + \mathfrak{P}(w - w_0). \tag{3}$$

Si w désigne un point quelconque intérieur à c_0, l'équation (2) sera par suite vérifiée identiquement lorsqu'on y substitue à z sa valeur prise de la relation (3).

[1]) Nous désignons par $\mathfrak{P}(t)$ une série procédant suivant les puissances entières de t, convergente tant que $|t|$ reste inférieur à une certaine limite et s'annulant pour $t = 0$, et qui d'ailleurs n'est pas la même dans les différentes formules qui suivent.

Digitized by Google

Désignons par e_{z_0} l'élément de fonction (3), par c_{z_0} son cercle de convergence.

Nous ferons d'abord voir que, pour toute valeur w intérieure à c_{z_0}, l'équation (2) est vérifiée si l'on y substitue à z la valeur (3).

Si l'on écrit la relation (1) sous la forme

$$H_1(z) - w\,H_2(z) = 0$$

et si, dans le premier membre de cette équation, on substitue à z l'expression (3), on aura une fonction de w qui est holomorphe en tout point intérieur à c_{z_0}, puisque $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont des fonctions entières. Or cette fonction de w s'annule identiquement à l'intérieur du cercle c_0 défini plus haut, et, en vertu d'une proposition connue sur les séries entières, elle doit donc s'annuler en tout point intérieur au cercle c_{z_0}. Dans ce cercle la série (3) satisfait donc à la relation précédente, et par suite aussi à la relation (2), puisque, par hypothèse, $H_1(z)$ et $H_2(z)$ ne s'évanouissent pas simultanément.

Comme la fonction $f(z)$ est uniforme, on en conclut qu'en deux points distincts intérieurs au cercle c_{z_0} la série (3) prend nécessairement des valeurs différentes. Donc la relation (3) établit une correspondance univoque entre l'intérieur du cercle c_{z_0} du plan des w et l'intérieur d'un certain domaine $\varkappa_{z_0}$ du plan des z qui ne se recouvre pas lui-même. D'après ce qui précède, deux points correspondants w et z satisfont toujours à l'équation (2). Puisqu'à tout point intérieur à $\varkappa_{z_0}$ correspond un point w à distance finie, ce domaine ne renferme aucun pôle de la fonction méromorphe $f(z)$. Enfin, en différentiant par rapport à w l'équation (2) après qu'on y aura substitué à z la série (3), on trouve

$$1 = f'(z)\frac{dz}{dw},$$

d'où l'on conclut que $f'(z)$ ne s'annule pas dans le domaine $\varkappa_{z_0}$, et que, par suite, la correspondance entre les domaines c_{z_0} et $\varkappa_{z_0}$ est conforme en tout point intérieur.

Pour toute valeur w intérieure à c_{z_0} l'équation (2) admet ainsi

Digitized by Google

une racine et une seule intérieure à $\varkappa_{z_0}$, et cette racine est représentée par la série (3).

2. Considérons maintenant l'ensemble des points z pour lesquels la dérivée $f'(z)$ est finie et différente de zéro. En formant pour chacun de ces points l'élément inverse correspondant (3), on obtiendra un ensemble infini E d'éléments de fonction dont chacun est représenté par une série entière convergente. Désignons d'une manière générale par e_z l'élément de l'ensemble E correspondant au point z, par c_z son cercle de convergence et par $\varkappa_z$ le domaine du plan des z sur lequel l'intérieur du cercle c_z se trouve représenté par cet élément.

Nous allons démontrer que *les éléments de l'ensemble E constituent une seule fonction analytique $z = \varphi(w)$*, qui est, par définition, *la fonction inverse* de la fonction méromorphe $w = f(z)$.

Pour cela nous devons établir

1:o que tout prolongement analytique d'un élément de l'ensemble E donne un autre élément de cet ensemble;

2:o que tout élément de l'ensemble E peut s'obtenir par prolongement analytique d'un élément donné de cet ensemble.

Démontrons d'abord la proposition 1:o pour le prolongement immédiat [1]) de l'élément (3) à un point w_1 intérieur à son cercle de convergence c_{z_0}. A ce point l'élément e_{z_0} fait correspondre un point z_1 intérieur à $\varkappa_{z_0}$, et le prolongement immédiat de la série (3) au point w_1 donne donc, d'après le n° 1, pour toute valeur w contenue dans un certain cercle autour de ce point la racine unique de l'équation (2) comprise dans un certain cercle de centre z_1. Mais, puisque le point z_1 est intérieur à $\varkappa_{z_0}$, la dérivée $f'(z_1)$ est finie et différente de zéro, et à ce point cor-

[1]) Pour simplifier l'exposition, nous conviendrons de dire que deux séries de puissances sont *les prolongements immédiats* l'une de l'autre, si leurs cercles de convergence ont une partie commune et si dans cette partie les séries prennent les mêmes valeurs. Cette notion s'étend aux séries de puissances fractionnaires, lesquelles seront appelées les prolongements immédiats l'une de l'autre si, dans la partie commune de leurs cercles de convergence, une détermination de l'une de ces séries se confond avec une détermination de l'autre.

Digitized by Google

respond donc un élément e_{z_1} de l'ensemble E qui représente la même racine dans un certain voisinage de w_1. Donc cet élément se confond avec le prolongement considéré de la série e_{z_0}.

Ceci posé, comme tout prolongement de la série (3) s'effectue par un nombre fini de prolongements immédiats, on n'aura qu'à appliquer aux prolongements successifs le raisonnement précédent pour reconnaître l'exactitude de la proposition 1:o.

De ce qui précède on tire le corollaire suivant dont nous aurons à faire usage dans la suite:

Si deux éléments e_{z_1} et e_{z_2} de l'ensemble E prennent en un point commun $w = w'$ de leurs cercles de convergence la même valeur $z = z'$, ils sont les prolongements immédiats l'un de l'autre.

En effet, les domaines $\varkappa_{z_1}$ et $\varkappa_{z_2}$ renfermant tous les deux le point z', l'élément $e_{z'}$ sera le prolongement immédiat de chacun des éléments e_{z_1} et e_{z_2}, qui seront donc bien les prolongements immédiats l'un de l'autre.

Abordons maintenant la proposition 2:o. Étant donné un élément quelconque $e_{z'}$ de l'ensemble E, distinct de l'élément e_{z_0}, joignons les points z_0 et z' par une courbe Γ ne se coupant pas elle-même, située toute entière à distance finie, et sur laquelle la dérivée $f'(z)$ est finie et différente de zéro. Soit z_1 le premier point de rencontre de Γ avec le contour du domaine $\varkappa_{z_0}$. A ce point correspond un élément e_{z_1}, et le point z_1 sera compris dans le domaine $\varkappa_{z_1}$ qui s'étend à l'extérieur de $\varkappa_{z_0}$. Si z_2 désigne le premier point de rencontre de Γ avec le contour de $\varkappa_{z_1}$ au delà de z_1, ce point z_2 fera à son tour partie d'un domaine $\varkappa_{z_2}$, et ainsi de suite.

Puisque deux domaines successifs quelconques de la suite $\varkappa_{z_0}$, $\varkappa_{z_1}, \ldots$ ont une partie commune, $e_{z_0}, e_{z_1}, \ldots$ sont les prolongements immédiats l'un de l'autre, comme on le voit directement en appliquant le corollaire précédent. Nous n'avons donc qu'à démontrer qu'il existe un nombre fini n tel que le point z' soit intérieur au domaine $\varkappa_{z_n}$. S'il n'en était pas ainsi, la suite des points $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ aurait un point-limite $\bar{z}$ situé sur Γ. Puisque $f'(\bar{z})$ est finie et différente de zéro, ce point $\bar{z}$ fait partie d'un domaine $\varkappa_{\bar{z}}$, et aux points z_ν compris dans ce

Digitized by Google

domaine correspond une suite de points w_ν intérieurs au cercle $c_{\bar{z}}$ et tendant vers le point $\bar{w} = f(\bar{z})$. D'après le corollaire ci-dessus, le prolongement immédiat de $e_{\bar{z}}$ à un quelconque de ces points w_ν se confond avec l'élément e_{z_ν} correspondant. Or on peut évidemment trouver un ν assez grand pour que le point $\bar{w}$ soit intérieur au cercle c_{z_ν}. Le domaine $\varkappa_{z_\nu}$ renfermerait donc le point $\bar{z}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La proposition ci-dessus se trouve ainsi complètement démontrée.

3. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les éléments de $\varphi(w)$ qu'on peut déduire de l'élément initial (3) par prolongement analytique au sens de WEIERSTRASS, et qui correspondent aux points z pour lesquels la dérivée $f'(z)$ est finie et différente de zéro.

Soit maintenant z_0 un pôle simple de la fonction $w = f(z)$; celle-ci sera représentée dans un certain cercle autour de z_0 par une série convergente de la forme

$$w = \frac{a}{z - z_0}[1 + \mathfrak{P}(z - z_0)],$$

d'où il suit

$$\frac{1}{w} = \frac{z - z_0}{a}[1 + \mathfrak{P}(z - z_0)].$$

Cette égalité définit inversement z comme une fonction de w qui est holomorphe à l'extérieur d'un certain cercle autour du point $w = 0$, et qui y sera représentée par une série convergente de la forme

$$z = z_0 + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{w}\right).$$

A tout pôle simple de $f(z)$ correspond donc un élément régulier de la fonction inverse relatif au point $w = \infty$.

D'ailleurs l'étude de la fonction $\varphi(w)$ dans le voisinage du point $w = \infty$ se ramène à l'étude de la fonction $\psi(w)$, inverse de la fonction méromorphe

$$w = \frac{1}{f(z)} = \frac{H_2(z)}{H_1(z)},$$

dans l'entourage du point $w = 0$. C'est pourquoi, dans la suite, nous n'insisterons jamais sur l'étude de $\varphi(w)$ pour $w = \infty$.

Digitized by Google

II. Les points critiques de la fonction inverse.

4. Prolongeons maintenant l'élément (3) de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ suivant un chemin G partant du point w_0. Les éléments successifs de $\varphi(w)$ font correspondre à G une courbe Γ dans le plan des z. Si les rayons des cercles de convergence de ces éléments décroissent vers zéro lorsque w tend vers un point ω de G, ce point est pour la fonction inverse un point critique. Nous allons démontrer que *z converge vers une valeur déterminée lorsque w tend vers ω suivant G.*

A cet effet décrivons autour de l'origine du plan des z un cercle C arbitrairement grand, sur la circonférence duquel n'est située aucune racine de l'équation

$$f(z) = \omega, \tag{4}$$

et désignons par ε_1 le minimum du module $|f(z) - \omega|$ sur cette circonférence. A l'intérieur de C l'équation (4) n'admet qu'un nombre limité de racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Entourons ces racines de petits cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$, extérieurs les uns aux autres mais intérieurs à C, et désignons par ε_2 la plus petite valeur de $|f(z) - \omega|$ sur les circonférences de ces cercles. Soit enfin ε le plus petit des nombres ε_1 et ε_2. Dans le domaine fini T limité par les cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et C, la fonction $\frac{1}{f(z) - \omega}$ est holomorphe, et son module atteint donc son maximum sur le contour de ce domaine. Ce maximum étant égal à $\frac{1}{\varepsilon}$, il s'ensuit qu'on a $|f(z) - \omega| > \varepsilon$ en tout point à l'intérieur de T.

Par hypothèse le prolongement analytique de la série (3) suivant G est possible jusqu'à un voisinage arbitrairement restreint de ω. Or il résulte de ce que nous venons de dire que, dès que le point w sera intérieur au cercle $|w - \omega| = \varepsilon$, le point correspondant $z = \varphi(w)$ sera extérieur au domaine T et restera, par suite, compris soit dans un cercle c_ν bien déterminé, soit dans la partie du plan extérieure à C. Ceci étant vrai quelque grand que soit le cercle C et quelque petits que soient les cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n$, on aura donc la proposition suivante:

Digitized by Google

Si on prolonge un élément de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ suivant un chemin aboutissant à un point critique ω, z tend soit vers une valeur finie déterminée satisfaisant à l'équation $f(z) = \omega$, soit vers l'infini.

5. Traitons d'abord le cas où, w tendant vers le point critique ω (à distance finie), z converge vers une racine ζ de l'équation (4). *On aura nécessairement* $f'(\zeta) = 0$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, au point ζ correspondrait un élément régulier e_ζ de $\varphi(w)$. En vertu du corollaire du n° 2, cet élément serait le prolongement immédiat de l'élément de $\varphi(w)$ correspondant à un point de G intérieur au cercle c_ζ, et suffisamment rapproché du point ω pour que le point correspondant z de la courbe Γ soit intérieur au domaine $\varkappa_\zeta$; par suite le point ω ne serait pas critique pour la branche considérée de $\varphi(w)$.

Au voisinage du point $z = \zeta$ la fonction $w = f(z)$ est donc représentée par une série convergente de la forme

$$w = \omega + a_k (z - \zeta)^k [1 + \mathfrak{P}(z - \zeta)], \tag{5}$$

où k désigne un entier supérieur à l'unité. En prenant la $k^{\text{ième}}$ racine, on en conclut

$$(w - \omega)^{\frac{1}{k}} = a_k^{\frac{1}{k}} (z - \zeta) [1 + \mathfrak{P}(z - \zeta)]^{\frac{1}{k}} = a_k^{\frac{1}{k}} (z - \zeta) [1 + \mathfrak{P}(z - \zeta)]. \tag{6}$$

D'après la théorie des fonctions implicites, il existe un cercle γ' de centre ζ et un autre cercle c' de centre ω tels que, si w reste compris dans c', à toute détermination de $(w - \omega)^{\frac{1}{k}}$ correspond une racine et une seule de l'équation (6) comprise dans γ'. Dans le cercle c', cette racine est représentée par une série convergente procédant suivant les puissances entières de $(w - \omega)^{\frac{1}{k}}$

$$z = \zeta + a_k^{-\frac{1}{k}} (w - \omega)^{\frac{1}{k}} \left\{ 1 + \mathfrak{P}\left[(w - \omega)^{\frac{1}{k}} \right] \right\}. \tag{7}$$

Donc, si w fait partie de c', les racines de l'équation (5), ou bien de l'équation

$$w = f(z), \tag{2}$$

Digitized by Google

situées à l'intérieur du cercle γ', seront représentées par les k branches de la série (7) correspondant aux différentes déterminations de $(w-\omega)^{\frac{1}{k}}$. D'après la forme de cette série, ces k racines sont toutes différentes entre elles à l'intérieur d'un cercle concentrique à c' et suffisamment petit.

Par le même raisonnement qu'au n° 1 on montre que la série (7) vérifie la relation (2) dans tout son cercle de convergence c. La fonction représentée par cette série peut être regardée comme uniforme sur une surface F de Riemann à k feuillets, étendue sur le cercle c et présentant en ω un point de ramification d'ordre k.

A un point w_1 de F distinct de ω correspond, en vertu de la relation (7), un point z_1 où la dérivée $f'(z)$ est finie et différente de zéro, ce qu'on prouve comme au n° 1. Au point z_1 correspond donc un élément e_{z_1} de la fonction inverse, et le corollaire du n° 2 fait voir que le prolongement immédiat de la série (7) au point w_1 (*cf.* la note p. 3) se confond nécessairement avec cet élément. Tout prolongement de la série (7) rentre ainsi dans l'ensemble E.

A deux points non superposés de la surface F correspondent toujours deux valeurs distinctes de la série (7), puisqu'elle vérifie la relation (2) et que la fonction $f(z)$ est uniforme. Il en est encore de même pour deux points superposés appartenant à des feuillets distincts de F, c'est-à-dire correspondant à des déterminations différentes de $(w-\omega)^{\frac{1}{k}}$. En effet, si en ces points la série (7) prenait des valeurs égales, ses prolongements immédiats aux mêmes points seraient identiques, en vertu du corollaire du n° 2, et, si on les continue vers le point ω, ils devraient donc se confondre dans un voisinage arbitrairement restreint de ce point, ce qui n'a pas lieu.

En somme on voit donc que la relation (7) établit une correspondance univoque entre l'intérieur de la surface F et l'intérieur d'un certain domaine $\varkappa$ du plan des z qui ne se recouvre pas lui-même. La correspondance est conforme en tout point intérieur, sauf aux points ζ et ω qui se correspondent.

Digitized by Google

Reprenons maintenant la courbe G du plan des w, suivant laquelle nous avions prolongé l'élément (3) de la fonction inverse, et la courbe correspondante Γ du plan des z. Soit w_1 un point de G compris dans le cercle de convergence c de la série (7) et assez proche de ω pour que le point correspondant z_1 de la courbe Γ soit intérieur au domaine $\varkappa$ défini ci-dessus. De ce qui précède il résulte que l'élément de la fonction $\varphi(w)$ avec lequel on arrive au point w_1, en prolongeant l'élément (3) le long de la courbe G, se confond avec le prolongement immédiat de la série (7) au même point. Nous avons ainsi démontré que *si z tend vers une valeur finie lorsque w tend vers un point singulier ω, ce point est un point critique algébrique pour la fonction inverse $z = \varphi(w)$.*

Si au contraire la fonction inverse $\varphi(w)$ tend vers l'infini lorsque w tend vers le point ω, ce point ne saurait être un point critique algébrique pour $\varphi(w)$. En effet, si ω était un point algébrique, on aurait dans son voisinage

$$z = \frac{a}{(w-\omega)^{\frac{1}{k}}}\left\{1 + \mathfrak{P}\left[(w-\omega)^{\frac{1}{k}}\right]\right\},$$

k étant un entier positif, d'où il suivrait pour la fonction $w = f(z)$, dans le voisinage du point $z = \infty$, un développement de la forme

$$f(z) = \omega + \frac{a^k}{z^k}\left[1 + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

ce qui est impossible puisque $z = \infty$ est pour $f(z)$ une singularité essentielle. Un raisonnement analogue prouve que le point ω ne saurait être un pôle pour la fonction $\varphi(w)$.

Il résulte de ce qui précède que tout point critique algébrique à distance finie de la fonction $\varphi(w)$ correspond à une racine de l'équation

$$f'(z) = 0. \tag{8}$$

Inversement à une racine quelconque de l'équation (8) correspond un développement de la forme (7) qui vérifie la relation (2), et le point correspondant w est donc un point critique algébrique pour $\varphi(w)$. Nous arrivons donc à cette conclusion:

Digitized by Google

La fonction inverse n'admet (à distance finie) d'autres points critiques algébriques que les points $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(\nu)}, \ldots$ *définis par les relations*

$$f'(z^{(\nu)}) = 0; \quad w^{(\nu)} = f(z^{(\nu)}).$$

Si la fonction méromorphe admet des pôles multiples, le point $w = \infty$ sera évidemment point critique algébrique pour certaines branches de la fonction inverse.

Pour plus d'uniformité, nous conviendrons de considérer aussi les séries de la forme (7) correspondant aux zéros de $f'(z)$ comme des éléments de la fonction $\varphi(w)$, en les appelant *éléments algébriques* de cette fonction. Désignons par $e_{z^{(\nu)}}$ l'élément algébrique de $\varphi(w)$

$$z = z^{(\nu)} + \mathfrak{P}\left[(w - w^{(\nu)})^{\frac{1}{k}}\right],$$

correspondant au point $z^{(\nu)}$, par $c_{z^{(\nu)}}$ son cercle de convergence, par $F_{z^{(\nu)}}$ la surface de Riemann étendue sur ce cercle, et par $\varkappa_{z^{(\nu)}}$ le domaine du plan des z sur lequel se trouve représentée cette surface en vertu de la relation précédente.

Si le chemin G traverse un point critique $w^{(\nu)}$, le prolongement de $\varphi(w)$ suivant ce chemin s'arrête nécessairement à $w^{(\nu)}$. Mais si l'on convient de contourner le point $w^{(\nu)}$ par un arc de cercle intérieur au cercle $c_{z^{(\nu)}}$ et laissant le point $w^{(\nu)}$ d'un côté déterminé, on définit *d'une manière univoque* le prolongement au delà de ce point.

Si, lorsqu'on prolonge $\varphi(w)$ suivant G en contournant suivant une loi donnée les points critiques algébriques, on s'arrête à un point ω au delà duquel le prolongement, au sens que nous venons de définir, sera impossible à effectuer, le point $z = \varphi(w)$ tend nécessairement vers l'infini lorsque w tend vers ω. En effet, d'après la proposition du n° précédent, le point z doit tendre vers une valeur déterminée lorsque w tend vers ω; mais cette valeur ne saurait être finie, puisque, dans ce cas, il lui correspondrait un élément régulier ou algébrique de $\varphi(w)$, de sorte que le prolongement serait possible au delà du point ω.

Digitized by Google

De ce qui précède on conclut encore qu'étant donné, dans le voisinage d'un point w_0, une suite d'éléments de $\varphi(w)$

$$z = z_n + \mathfrak{P}_n(w - w_0), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

différents entre eux en w_0, si ces éléments peuvent, à des points critiques algébriques près, être prolongés suivant un chemin G partant de w_0, ils prendront des valeurs différentes en chaque point de G distinct des points critiques. Si, en effet, deux de ces éléments, prenaient la même valeur en un point où ils sont holomorphes ils seraient identiques, d'après le corollaire du n° 2, et leurs prolongements se confondraient donc le long de G et, par suite aussi au point w_0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le nombre des points $z^{(\nu)}$ et $w^{(\nu)}$ peut être fini ou infini, mais il est toujours dénombrable. Parmi les points $w^{(\nu)}$ plusieurs, et même une infinité, peuvent se confondre. Tandis que les points $z^{(\nu)}$ n'admettent aucun point-limite à distance finie, il peut bien en exister pour les points $w^{(\nu)}$.

6. Supposons maintenant que z tend vers l'infini lorsque w tend vers ω suivant la courbe G. Comme ce point, d'après le n° précédent, ne peut être ni un point critique algébrique ni un pôle, il est, d'après la terminologie de M. PAINLEVÉ [1]), ou un *point singulier essentiel* ou un *point transcendant ordinaire*, suivant que la branche considérée de $\varphi(w)$ est ou non *indéterminée au point* ω.

Précisons d'abord ce qu'on doit entendre par là. Considérons la courbe Γ décrite par le point $z = \varphi(w)$ lorsque w tend vers ω suivant G. Soit c un cercle de centre ω et de rayon r. A partir d'un certain point z_r de la courbe Γ, l'inégalité $|f(z) - \omega| < r$ restera constamment vérifiée sur cette courbe. Si l'on prolonge alors l'élément e_{z_r} de $\varphi(w)$ suivant tous les chemins possibles intérieurs à c, aux points w compris dans ce cercle correspondra un ensemble de points z qui constituent, avec leurs points-limites, un domaine connexe Δ_r renfermant la courbe Γ à partir du point z_r. Lorsque r tend vers zéro, le domaine Δ_r tend vers

[1]) P. PAINLEVÉ: *Notice sur ses travaux scientifiques*, Paris 1900, p. 20.

Digitized by Google

un domaine-limite connexe Δ_0, qui est appelé *domaine d'indétermination* de la fonction $\varphi(w)$ au point ω. Si ce domaine se réduit à un seul point, on dit que la branche considérée de $\varphi(w)$ est *déterminée au point* ω, tandis qu'elle y est *indéterminée* au cas contraire. Ainsi par ex. les fonctions $\log w$ et w^a (a réel) sont déterminées au point $w=0$, tandis que $\log \sin \frac{1}{w}$ et $a^{\frac{1}{w}}$ y sont indéterminées.

Ceci posé, nous ferons voir que *la branche considérée de la fonction inverse* $\varphi(w)$ *est déterminée au point* ω.

La courbe Γ du plan des z qui correspond à la courbe G s'étend, par hypothèse, à l'infini, et la fonction $w=f(z)$ tend vers ω sur cette courbe. Or, d'après la démonstration du n° 4, le point $z=\varphi(w)$ sera extérieur au cercle C dès que $|w-\omega|<\varepsilon$, puisque dans le cas contraire z devrait tendre vers un point à distance finie lorsque w tend vers ω. Il s'ensuit que, pour $r \leq \varepsilon$, le domaine Δ_r sera situé tout entier à l'extérieur du cercle C, et le domaine d'indétermination Δ_0 se réduit donc au point à l'infini, ce qui démontre notre assertion. Nous avons ainsi démontré que, *si z tend vers l'infini lorsque w tend vers un point ω, ce point est pour la fonction inverse $z=\varphi(w)$ un point transcendant ordinaire*, ou, plus simplement, *un point transcendant.*

De la proposition du n° 4 on conclut maintenant:

La fonction inverse n'admet d'autres singularités que des points critiques algébriques et des points transcendants.

Nous avons vu que, si ω est un point transcendant de $\varphi(w)$, il y a dans le plan des z un chemin Γ s'étendant vers l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers ω. Inversement, s'il existe une courbe Γ de cette espèce, le point ω est pour $\varphi(w)$ un point transcendant. En effet, à Γ correspond dans le plan des w une courbe G tendant vers le point ω. L'élément c_z de $\varphi(w)$ correspondant à un point z de Γ pourra être prolongé suivant G jusqu'au point ω, en contournant les points critiques algébriques par des arcs de cercles infiniment petits convenablement choisis, de telle sorte que le point $z=\varphi(w)$ décrive la courbe Γ en s'éloignant vers l'infini lorsque w tend vers ω.

Digitized by Google

Appelons avec M. VALIRON [1]) *chemin de détermination* ω un chemin du plan des z allant à l'infini, sur lequel la fonction $f(z)$ tend vers ω. Appelons de plus ω une *valeur asymptotique de* $f(z)$ s'il existe un chemin de détermination ω. Nous pouvons alors énoncer notre résultat sous la forme suivante:

Les points transcendants de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ *se confondent avec les valeurs asymptotiques de la fonction méromorphe* $w = f(z)$ [2]).

Dans la Section VI nous reviendrons sur l'étude des points transcendants.

7. Puisqu'une fonction méromorphe prend toute valeur donnée, à l'exception de deux valeurs au plus, en une infinité de points, la fonction inverse admet nécessairement une infinité de branches. Ces branches se permutent autour des points singuliers de la fonction inverse, qui sont, comme nous l'avons vu, ou des points critiques algébriques ou des points transcendants.

Considérons en particulier le cas où la fonction $f(z)$ n'admet qu'un nombre fini de pôles multiples, et où sa dérivée $f'(z)$ n'admet qu'un nombre fini de zéros. Parmi les branches de la fonction inverse, il n'y a alors qu'un nombre limité qui se permutent autour des points critiques algébriques, et par suite les autres branches doivent se permuter autour des points transcendants. Le nombre des points transcendants doit être de deux au moins, puisqu'il ne peut y avoir aucune fonction multiforme dont une infinité de branches se permutent autour d'un seul point de ramification. Nous trouvons donc cette proposition intéressante:

---

[1]) G. VALIRON: *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière*, Thèse, Toulouse 1914, p. 135.

[2]) Ce résultat a été signalé par M. HURWITZ dans sa Note: *Sur les points critiques des fonctions inverses*, Comptes Rendus, Tome 143, 1906, p. 877.

Dans son Mémoire: *Sur l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'une singularité transcendante* (Ann. de l'Éc. Norm., 1908), M. BOUTROUX dit (p. 362) que la dérivée d'une fonction entière $f(z)$ tend vers zéro sur tout chemin allant à l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers une valeur-limite finie. Ceci n'est pas exact, comme le montre la fonction très simple $\frac{\sin(z^2)}{z}$, qui tend vers zéro sur l'axe réel, tandis que sa dérivée n'y tend vers aucune limite.

Digitized by Google

Si une fonction méromorphe n'admet qu'un nombre fini de pôles multiples, et si sa dérivée n'admet qu'un nombre fini de zéros, la fonction présente au moins deux valeurs asymptotiques.

De cette propriété jouissent par ex. les fonctions entières de la forme

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} e^{H(z)} P(z)\, dz,$$

où $H(z)$ est une fonction entière quelconque et $P(z)$ un polynome. Ainsi la fonction

$$w = \int_0^z e^{-z^2} dz,$$

considérée par M. Hurwitz, admet trois valeurs asymptotiques; elle tend en effet vers la valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ sur l'axe réel positif, vers la valeur $-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ sur l'axe réel négatif, et vers l'infini sur l'axe imaginaire.

Inversement, si la fonction $w = f(z)$ n'admet aucune valeur asymptotique, sa dérivée doit s'évanouir en une infinité de points, et les valeurs correspondantes w ne peuvent pas toutes se confondre. Comme exemples de fonctions dépourvues de valeurs asymptotiques on peut citer les fonctions elliptiques. Soit en effet $w = f(z)$ une fonction elliptique méromorphe, et désignons par w_0 une valeur quelconque (finie ou non). Puisqu'à l'intérieur de tout parallélogramme de périodes l'équation $f(z) = w_0$ n'admet qu'un nombre fini de racines, on pourra, de chaque racine de cette équation comme centre, décrire des cercles de même rayon de sorte que tous ces cercles soient extérieurs les uns aux autres. Sur leurs circonférences l'expression $|f(z) - w_0|$ aura un minimum positif ε (ou $|f(z)|$ un maximum fini M, si $w_0 = \infty$), d'où il suit que, dans toute la partie du plan qui est extérieure à ces cercles, on aura $|f(z) - w_0| > \varepsilon$ (resp. $|f(z)| < M$). Il ne peut donc exister aucun chemin de détermination w_0, d'où il résulte que $f(z)$ n'admet aucune valeur asymptotique, et, par suite, son inverse aucun point transcendant.

Digitized by Google

Puisqu'à toute valeur finie z correspond un élément régulier ou algébrique de la fonction inverse $z = \varphi(w)$, cette fonction prend effectivement toute valeur finie pour une valeur finie ou infinie de la variable. Quant à la valeur $z = \infty$, on doit distinguer deux cas, suivant que la fonction méromorphe présente ou non des valeurs asymptotiques. Dans le premier cas $\varphi(w)$ admet des points transcendants, et à chacun de ces points aboutissent des chemins sur lesquels $z = \varphi(w)$ tend vers l'infini. Dans le second cas, il n'y a pas de tel chemin, et la fonction $z = \varphi(w)$ ne devient jamais infinie.

III. Le domaine Δ.

8. Soit maintenant dans le plan des w un cercle c de rayon r, ayant comme centre un point quelconque ω. Considérons en un point intérieur à ce cercle un élément de $\varphi(w)$, et prolongeons-le suivant tous les chemins possibles ne sortant pas de c. Les valeurs correspondantes de z représentent un ensemble de points qui, avec leurs points-limites, constituent un domaine connexe Δ. Les éléments de $\varphi(w)$ (y compris les éléments algébriques) correspondant aux points z situés à l'intérieur de Δ définissent dans le cercle c une portion ou une branche de cette fonction que nous désignerons brièvement par $\varphi_\Delta(w)$.

Le domaine Δ, qui peut s'étendre à l'infini, n'admet d'autres contours que les courbes γ, en nombre fini ou infini, qui correspondent à la circonférence c. Sur chacun de ces contours γ on a donc

$$|f(z) - \omega| = r, \tag{9}$$

tandis que l'inégalité

$$|f(z) - \omega| < r \tag{10}$$

subsiste en tout point compris dans l'intérieur du domaine Δ.

Dans le plan des z il peut d'ailleurs y avoir plusieurs domaines satisfaisant aux mêmes conditions que le domaine Δ considéré. S'il existe, en effet, à l'extérieur de Δ un point z pour

Digitized by Google

lequel est vérifiée l'inégalité (10), ce point fera évidemment partie d'un autre domaine jouissant des mêmes propriétés.

D'autre part, tout point z pour lequel est remplie l'inégalité

$$(11) \qquad |f(z) - \omega| > r$$

fera partie d'un domaine Δ', à l'intérieur duquel subsiste cette même inégalité, tandis que la relation (9) est vérifiée sur son contour.

L'ensemble des domaines Δ et Δ' remplit évidemment tout le plan des z. Aucun de ces domaines ne peut renfermer intérieurement le point $z = \infty$, car dans ce cas l'une des inégalités (10) et (11) serait vérifiée dans un certain voisinage du point $z = \infty$, ce qui contredit la propriété fondamentale de la singularité essentielle.

Tout domaine Δ est limité, comme nous l'avons déjà dit, par des courbes γ correspondant à la circonférence c. Une courbe γ qui est fermée entoure soit un domaine fini Δ, soit un domaine fini Δ'. En appliquant le théorème connu suivant lequel une fonction monogène, holomorphe dans un certain domaine, atteint toujours sa plus grande valeur absolue sur le contour de ce domaine, on conclut que tout domaine fini Δ contient un zéro de $f(z) - \omega$, tandis que tout domaine fini Δ' renferme un pôle de $f(z)$. Du principe qui concerne la variation de l'argument d'une fonction monogène correspondant à un circuit fermé de la variable, il résulte d'autre part que, pour toute valeur w' satisfaisant à la condition $|w' - \omega| < r$ (resp. $|w' - \omega| > r$), un domaine fini Δ (resp. Δ') renferme toujours le même nombre de racines de l'équation $f(z) = w'$, les racines multiples étant comptées avec leurs ordres respectifs. Si cette circonstance ne se présente pas, on peut inversement conclure que le domaine Δ (ou Δ') est infini. En particulier, si l'équation $f(z) = w'$ est dépourvue de racines à l'intérieur de Δ (ou Δ'), ce domaine est nécessairement infini.

Si une courbe γ n'est pas fermée, ses deux branches s'étendent à l'infini. Cette courbe γ s'obtient, en effet, par prolongement d'un certain élément de $\varphi_\Delta(w)$ suivant la circonférence c,

Digitized by Google

en contournant les points algébriques par des arcs de cercles infiniment petits intérieurs à c. Si ce prolongement n'est possible que jusqu'à un certain point $\bar{w}$ de c, qui est alors un point transcendant de $\varphi(w)$, le point $z = \varphi(w)$ tend vers l'infini lorsque w tend vers $\bar{w}$, et la branche correspondante de γ s'étend donc à l'infini. Supposons maintenant que le prolongement suivant c puisse se faire indéfiniment, sans qu'on soit jamais arrêté par un point transcendant, et choisissons dans le plan des z un cercle C arbitrairement grand. Nous devons établir qu'à partir d'un certain point de γ, la branche considérée de cette courbe sera toute entière extérieure à C. Puisque, pour une valeur quelconque w_1 remplissant la condition $|w_1 - \omega| = r$, l'équation $f(z) = w_1$ admet une suite infinie de racines situées sur γ, tandis que, à l'intérieur de C, il n'y en a qu'un nombre limité, ces racines seront, à partir d'une certaine d'entre elles, toutes extérieures à C. Si notre assertion n'était pas vraie, la courbe γ devrait rencontrer la circonférence C en une infinité de points qui auraient au moins un point-limite situé sur C, et un voisinage arbitrairement restreint de ce point-limite serait traversé par une infinité d'arcs distincts de la courbe (9). Mais un tel point ne saurait être ni un point d'holomorphie ni un pôle pour $f(z)$, ce qui implique une contradiction.

Faisons encore la remarque suivante qui nous sera utile plus loin:

Étant donnée une valeur quelconque, $w = \omega$, et un cercle C arbitrairement grand autour du point $z = 0$, on pourra choisir r si petit que tout domaine infini Δ correspondant au cercle $|w - \omega| < r$ soit situé à l'extérieur de C.

Choisissons en effet C de telle sorte que l'expression $f(z) - \omega$ ne s'évanouisse pas sur sa circonférence, et que son module y ait par suite un minimum positif ε. Si l'on prend $r < \varepsilon$, un domaine Δ quelconque correspondant au cercle $|w - \omega| \leq r$ ne peut évidemment renfermer aucun point de la circonférence C, et tout domaine infini Δ sera donc situé tout entier à l'extérieur de C.

Digitized by Google

9. En conservant les notations du n° précédent nous allons maintenant démontrer la proposition suivante:

Étant donné un élément quelconque de $\varphi_\Delta(w)$, il existe un chemin compris dans c et tendant vers ω suivant lequel cet élément peut être prolongé jusqu'au point ω [1]).

Le théorème est évident si l'équation $f(z) = \omega$ admet des racines à l'intérieur de Δ. Supposons donc que cette équation y soit dépourvue de racines. Le domaine Δ s'étend alors à l'infini, d'après le n° précédent.

Soit $z = a$ un point quelconque extérieur à Δ, et soit ϱ sa plus courte distance à la frontière de ce domaine. L'inégalité

$$|\varphi_\Delta(w) - a| \geqq \varrho \tag{12}$$

restera alors vérifiée, de quelque manière qu'on prolonge $\varphi_\Delta(w)$ dans le cercle c. Choisissons un cercle c_1 concentrique à c et de rayon r_1 ($< r$) arbitrairement petit. La proposition que nous avons en vue sera démontrée si l'on établit que, *quelque petit que soit r_1, il existe un élément de $\varphi_\Delta(w)$ correspondant à un point w intérieur à c_1*. En effet, l'élément initial pourra alors être prolongé jusqu'à ce point, et l'élément ainsi obtenu, prolongé suivant tous les chemins possibles compris dans c_1, définit à l'intérieur de ce cercle une branche $\varphi_{\Delta_1}(w)$ de la fonction inverse à laquelle on pourra appliquer le même raisonnement, et ainsi de suite.

---

[1]) Dans sa Thèse: *Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers* (Journal de Math., VI Série, Tome I, 1905) M. Zoretti énonce (p. 49) un théorème qu'il a reproduit plus tard dans son Livre: *Leçons sur le prolongement analytique* (Paris 1911, p. 73), où il l'énonce sous la forme suivante:

Soit une fonction multiforme à domaine d'existence borné (ou plus simplement pourvue de singularités continues); si cette fonction n'admet comme points transcendants que des points ordinaires en chacun desquels elle prend la valeur zéro, elle est identiquement nulle.

En admettant l'exactitude de ce théorème, on pourrait en déduire immédiatement la proposition ci-dessus. Cependant la démonstration que donne M. Zoretti de son théorème ne nous semble nullement satisfaisante au point de vue de la rigueur.

Digitized by Google

Si la proposition énoncée n'était pas vraie, il existerait un cercle de centre ω à l'intérieur duquel la branche $\varphi_\Delta(w)$ ne saurait être prolongée. Désignons par c' le plus grand cercle jouissant de cette propriété, par r' son rayon. Si on prolonge un élément de $\varphi_\Delta(w)$ suivant un chemin quelconque compris dans c et aboutissant à un point intérieur au cercle c', en contournant les points critiques algébriques comme il a été dit au n° 5, on s'arrêtera nécessairement à un point transcendant de $\varphi(w)$ situé à l'extérieur ou sur la circonférence de ce cercle. D'autre part, il existe dans la couronne (c', c) des points w arbitrairement voisins de la circonférence c' jusqu'auxquels $\varphi_\Delta(w)$ peut être prolongée.

Soit w_0 un point intérieur à la couronne (c', c) auquel correspond un élément

$$z = z_0 + a_1(w - w_0) + a_2(w - w_0)^2 + \cdots \tag{13}$$

de $\varphi_\Delta(w)$. Ce point peut être choisi de telle sorte qu'on ait

$$|w_0 - \omega|^2 < r r'. \tag{14}$$

Si nous posons

$$\bar{w} - \omega = \frac{(w_0 - \omega)^2}{w - \omega} \tag{15}$$

et si nous marquons les points $\bar{w}$ dans le plan des w, ce plan sera transformé en lui-même par une inversion de centre ω qui laisse invariable le point w_0. Le cercle c sera transformé en un cercle concentrique $\bar{c}$ dont le rayon, en vertu de (14), est inférieur à r', et de même le cercle c' en un cercle concentrique $\bar{c}'$ intérieur à c. La couronne $(c', \bar{c}')$, qui renferme le point w_0, sera donc comprise dans la couronne $(\bar{c}, c)$.

Si dans l'élément (13) on remplace w par $\bar{w}$ et qu'on substitue ensuite à $\bar{w}$ sa valeur prise de la relation (15), on obtient la série

$$\bar{z} = z_0 - a_1(w - w_0) + \left(\frac{a_1}{w_0 - \omega} + a_2\right)(w - w_0)^2 + \cdots \tag{13'}$$

qui définit, avec tous ses prolongements analytiques, une fonction $\bar{z} = \bar{\varphi}(w)$ satisfaisant à la relation

Digitized by Google

$$\bar{z} = \bar{\varphi}(w) = \varphi(\bar{w}),$$

les valeurs w et $\bar{w}$ étant toujours liées par l'équation (15). En prolongeant l'élément (13)' suivant tous les chemins possibles extérieurs à $\bar{c}$, on définit une portion déterminée $\bar{\varphi}_{\Delta}(w)$ de cette fonction. Les points $\bar{z} = \bar{\varphi}_{\Delta}(w)$ sont évidemment compris dans le domaine Δ, d'où il suit

$$(12)' \qquad |\bar{\varphi}_{\Delta}(w) - a| \geqq \varrho.$$

D'autre part il résulte de ce qui précède qu'aucun élément de $\bar{\varphi}_{\Delta}(w)$ ne peut être prolongé à l'extérieur du cercle $\bar{c}'$ suivant un chemin extérieur à $\bar{c}$.

Ceci posé, considérons la fonction

$$(16) \qquad Z = \Phi(w) = (\varphi(w) - a)(\bar{\varphi}(w) - a),$$

définie par tous les prolongements analytiques de l'élément initial qui se déduit des éléments (13) et (13)' de $\varphi(w)$ et $\bar{\varphi}(w)$, et qui s'écrit

$$(17) \quad Z = (z - a)(\bar{z} - a)$$
$$= (z_0 - a)^2 + \left[\left(\frac{a_1}{w_0 - \omega} + 2a_2\right)(z_0 - a) - a_1^2\right](w - w_0)^2 + \cdots.$$

Le domaine d'existence de cette fonction $\Phi(w)$ est compris tout entier dans la couronne $(c', \bar{c}')$. En effet, si on prolonge $\Phi(w)$ suivant un chemin quelconque qui s'étend à l'extérieur de $(c', \bar{c}')$, en contournant toujours les points critiques algébriques, on rencontrera un point w_1, situé à l'intérieur ou sur le contour de $(c', \bar{c}')$, qui est un point transcendant pour l'un au moins des facteurs $\varphi(w) - a$ et $\bar{\varphi}(w) - a$, lequel tendra par suite vers l'infini lorsque w tend vers w_1, tandis que, d'après (12) et (12)', l'autre facteur est toujours de module supérieur ou égal à ϱ. Le prolongement au delà du point w_1 est donc impossible.

En vertu des inégalités (12) et (12)' la fonction $\Phi(w)$ vérifie dans tout son domaine d'existence l'inégalité

$$(18) \qquad |\Phi(w)| > \varrho^2.$$

Digitized by Google

En posant $Z_0 = (z_0 - a)^2$ on conclut de l'égalité (17) [1])

$$w = w_0 + \mathfrak{P}\left[(Z - Z_0)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{19}$$

Cette série définit, avec tous ses prolongements, une fonction analytique $w = F(Z)$, l'inverse de la fonction $Z = \Phi(w)$. En vertu de l'inégalité (18) la fonction $F(Z)$ n'existe pas à l'intérieur du cercle $|Z| = \varrho^2$. Donc, si on prolonge l'une quelconque des déterminations de la série (19) vers le point $Z = 0$ suivant le rayon R_0 passant par le point Z_0, en contournant les points critiques algébriques par des demi-circonférences situées d'un côté déterminé de R_0, on doit nécessairement s'arrêter à *un point critique non algébrique* Z' satisfaisant à la condition $|Z'| > \varrho^2$.

Des inégalités

$$|Z| = |z - a| \cdot |\bar{z} - a| < |Z_0|; \; |z - a| > \varrho; \; |\bar{z} - a| > \varrho,$$

qui restent toujours vérifiées lorsque Z se meut vers l'origine suivant le rayon R_0, on tire

$$|z - a| < \frac{|Z_0|}{\varrho}, \; |\bar{z} - a| < \frac{|Z_0|}{\varrho}.$$

Les points $z = \varphi(w)$ et $\bar{z} = \bar{\varphi}(w)$ restent donc constamment compris dans une portion finie Δ_0 du domaine Δ.

Sur le rayon R_0 on peut trouver une suite infinie de points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ tendant vers Z' et tels que les points correspondants $w_1 = F(Z_1)$, $w_2 = F(Z_2), \ldots$ tendent vers un seul point-limite w', faisant partie de la couronne $(c', \bar{c}')$. Les points $z_1 = \varphi(w_1)$, $z_2 = \varphi(w_2), \ldots$ admettront un ou plusieurs points-limites contenus dans Δ_0, qui sont nécessairement des racines de l'équation $f(z) = w'$. Mais, comme le nombre de ces racines est limité, on pourra, de la suite $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$, extraire une nouvelle suite infinie $Z_{n_1}, Z_{n_2}, \ldots, Z_{n_p}, \ldots$ telle que les valeurs correspondantes

[1]) Pour des valeurs particulières de z_0 et de a le coefficient de $(w - w_0)^2$ dans la série (17) peut s'évanouir; l'élément inverse (19) admet alors le point Z_0 comme point critique algébrique d'ordre supérieur.

Digitized by Google

$z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots$ tendent vers une racine déterminée z' de cette équation. A chacun des points z_{n_p} correspond un point $\bar{z}_{n_p}$ défini par la relation

$$(z_{n_p} - a)(\bar{z}_{n_p} - a) = Z_{n_p}.$$

Les points $\bar{z}_{n_p}$ tendent évidemment vers le point $\bar{z}'$ qui vérifie l'équation $(z' - a)(\bar{z}' - a) = Z'$, et qui fait également partie du domaine Δ_0.

Formons les éléments $e_{z'}$ et $e_{\bar{z}'}$ de la fonction inverse $\varphi(w)$ qui correspondent respectivement aux points z' et $\bar{z}'$, et remplaçons dans $e_{\bar{z}'}$ la variable w par $\omega + \frac{(w_0 - \omega)^2}{w - \omega}$, ce qui nous donne un élément de $\bar{\varphi}(w)$ au voisinage de w' qui prend la valeur $\bar{z}'$ en ce point. A ces éléments de $\varphi(w)$ et $\bar{\varphi}(w)$ correspond un élément de la fonction (16) procédant suivant les puissances entières ou fractionnaires de $w - w'$ et prenant la valeur Z' pour $w = w'$. Désignons brièvement par e' cet élément, et par C' son cercle de convergence. Il s'ensuit inversement pour w un développement suivant les puissances entières ou fractionnaires de $Z - Z'$ qui, pour $Z = Z'$, se réduit à w'. Soient ε' cet élément de fonction et Γ' son cercle de convergence.

Considérons maintenant les domaines $\varkappa_{z'}$ et $\bar{\varkappa}_{\bar{z}'}$ du plan des z, renfermant respectivement les points z' et $\bar{z}'$, qui correspondent aux cercles de convergence des éléments considérés de $\varphi(w)$ et $\bar{\varphi}(w)$. Prenons l'entier p suffisamment grand pour que z_{n_p} et $\bar{z}_{n_p}$ soient intérieurs à ces domaines $\varkappa_{z'}$ et $\bar{\varkappa}_{\bar{z}'}$, et que les points w_{n_p} et Z_{n_p} soient compris dans C' et Γ'. Si, pour ces points z_{n_p} et $\bar{z}_{n_p}$, on forme de la manière indiquée l'élément correspondant de la fonction (16), cet élément sera le prolongement immédiat de l'élément e', et son inverse sera le prolongement immédiat de ε'. Mais, comme d'autre part cet élément inverse se confond avec l'élément de $F(Z)$ avec lequel on arrive au point Z_{n_p} en prolongeant l'élément initial (19) suivant R_0, le point Z' serait donc pour $F(Z)$ un point régulier ou un point critique algébrique, contrairement à ce que nous avions admis. L'antithèse est donc inexacte et notre proposition est démontrée.

Digitized by Google

Cette proposition s'applique à toute fonction monogène qui dans le domaine Δ satisfait aux mêmes conditions que la fonction méromorphe $f(z)$.

10. Du théorème précédent on peut tirer cette autre proposition:

S'il y a dans le cercle c un point w' tel que l'équation $f(z) = w'$ n'ait aucune racine dans le domaine Δ, w' est un point transcendant pour $\varphi_\Delta(w)$.

Si d'abord $w' = \omega$, il suit du théorème précédent qu'un élément quelconque de $\varphi_\Delta(w)$ peut être prolongé jusqu'au point ω suivant un chemin contenu dans c. D'après le n° 4 le point $z = \varphi(w)$ tendra ou vers l'infini, ou vers une racine de l'équation $f(z) = w'$ lorsque w tend vers ω. Mais comme, par hypothèse, le domaine Δ ne renferme aucune racine de cette équation, z doit tendre vers l'infini, et w' est donc pour $\varphi_\Delta(w)$ un point transcendant.

Soit maintenant w' un point quelconque intérieur à c et distinct de ω. Considérons la fonction méromorphe

$$F(z) = \frac{f(z) - w'}{f(z) - \bar{w}'},$$

où $\bar{w}'$ désigne le point conjugué de w' par rapport au cercle c. Sur le contour de Δ on a $|F(z)| = R = \frac{|w' - \omega|}{r}$, et à l'intérieur de ce domaine $0 < |F(z)| < R$. D'après ce qui a été dit tout à l'heure, le domaine Δ renferme donc une courbe s'étendant à l'infini sur laquelle $F(z)$ tend vers zéro et, par suite, $f(z)$ vers w', d'où il suit que w' est un point transcendant pour $\varphi_\Delta(w)$.

Comme un corollaire immédiat on tire de cette proposition la suivante:

Si l'équation $f(z) = \omega$ (ω finie ou non) n'admet dans tout le plan des z qu'un nombre fini de racines, ω est une valeur asymptotique pour la fonction $f(z)$ et, par suite, $w = \omega$ un point transcendant pour la fonction inverse $\varphi(w)$ [1]).

[1]) Appliqué aux fonctions entières, ce théorème nous apprend qu'il existe un chemin s'éloignant vers l'infini sur lequel la fonction entière tend vers

Digitized by Google

En effet, traçons un cercle C renfermant toutes les racines de l'équation $f(z) = \omega$, désignons par $\varepsilon (> 0)$ le minimum du module $|f(z) - \omega|$ sur la circonférence de ce cercle, et choisissons $r < \varepsilon$. En vertu de la propriété fondamentale de la singularité essentielle, il existe dans le cercle c de centre ω et de rayon r un point w tel que l'équation $f(z) = w$ admette une racine extérieure à C. Le domaine Δ correspondant au cercle c qui renferme cette racine sera situé tout entier à l'extérieur de C, et l'équation $f(z) = \omega$ n'aura donc aucune racine à l'intéreur de ce domaine. Donc Δ renferme nécessairement un chemin de détermination ω, ce qui prouve notre proposition.

Voici un autre théorème qui découle immédiatement aussi de la même proposition:

Si, à l'intérieur et sur le contour d'un domaine infini T, la fonction $f(z)$ est holomorphe en tout point à distance finie, et si l'inégalité $|f(z)| < M$ est vérifiée sur le contour de T, ou bien cette inégalité subsiste en tout point à l'intérieur du domaine T, ou bien ce domaine renferme un chemin allant à l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers l'infini.

Si, en un point intérieur de T, $|f(z)| \geqq M$, ce domaine renferme un domaine Δ' sur le contour duquel $|f(z)| = M$ et à l'intérieur duquel $|f(z)| > M$. En vertu de notre hypothèse, l'égalité $f(z) = \infty$ n'a aucune racine à l'intérieur du domaine Δ', qui renferme par suite un chemin de détermination ∞.

Démontrons encore ce théorème, qui suit de la proposition du n° 9:

Étant donné en un point w_0 un élément de la fonction inverse $\varphi(w)$ et une courbe g joignant w_0 à un autre point quelconque w' du plan des w, il existe un chemin tendant vers w' et compris dans une bande arbitrairement mince renfermant la courbe g, suivant lequel l'élément considéré peut être prolongé jusqu'au point w'.

On peut, en effet, construire un nombre fini de cercles c_1, c_2,

---

l'infini, et que, par suite, $w = \infty$ est un point transcendant pour l'inverse de toute fonction entière, proposition dont la vérité semble probable *a priori*, mais dont nous n'avons trouvé nulle part de démonstration satisfaisante.

Digitized by Google

..., c_n, intérieurs à la bande considérée et tels que c_1 renferme le point w_0, c_2 le centre de $c_1, \ldots, c_n$ le centre de c_{n-1}, le cercle c_n ayant lui-même comme centre le point w'. En vertu de la proposition du n° précédent, l'élément considéré de $\varphi(w)$ peut être prolongé dans l'intérieur du cercle c_1 jusqu'à un voisinage quelconque du point w_1, et, par suite, jusqu'à un point intérieur à c_2; l'élément obtenu en ce point pourra de même être prolongé dans l'intérieur de c_2 jusqu'à un point compris dans c_3, et ainsi de suite. La proposition est donc démontrée.

IV. Quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'une singularité essentielle.

11. Les propositions qui suivent se rattachent étroitement aux résultats obtenus antérieurement par M. LINDELÖF [1]), à qui nous devons aussi l'idée de leurs démonstrations.

Soient T un domaine du plan des z qui s'étend à l'infini et qui est limité par un seul contour sans points multiples, Γ' et Γ'' les deux branches infinies de ce contour, et $f(z)$ une fonction monogène qui est holomorphe à l'intérieur de T et continue sur son contour.

Nous allons établir la proposition suivante:

Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers une même valeur-limite finie ω lorsque z augmente indéfiniment, et si $f(z)$ est bornée dans T, cette fonction converge uniformément vers ω lorsque z s'éloigne vers l'infini à l'intérieur de T.

a étant un point extérieur au domaine T, appliquons à la variable z la transformation $\bar{z} = \frac{1}{z-a}$. Cette transformation fait correspondre à T un domaine fini $\bar{T}$ dont le contour passe par le point $\bar{z} = 0$, qui correspond au point $z = \infty$. La fonction

[1]) E. LINDELÖF: *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Sc. Fennicæ, Tome XXXV, 1908.

Digitized by Google

$\bar{f}(\bar{z}) = f\left(\frac{1 + a\bar{z}}{\bar{z}}\right)$ est holomorphe et bornée dans le domaine $\bar{T}$, et tend sur son contour vers ω lorsque $\bar{z}$ tend vers l'origine.

Soit $\zeta = \vartheta(\bar{z})$ une fonction qui donne la représentation conforme de l'intérieur de $\bar{T}$ sur l'intérieur du cercle $|\zeta| < 1$. D'après un résultat obtenu récemment par M. CARATHÉODORY [1]), la correspondance univoque et continue entre les points de ces deux domaines subsiste encore sur leurs contours. Si l'on désigne par $\bar{z} = \Theta(\zeta)$ l'inverse de la fonction $\zeta = \vartheta(\bar{z})$, et si, dans la fonction $\bar{f}(\bar{z})$, on substitue à $\bar{z}$ cette fonction $\Theta(\zeta)$, on obtient une fonction $F(\zeta)$, qui est holomorphe et bornée pour $|\zeta| < 1$ et continue pour $|\zeta| \leqq 1$, excepté peut-être le point ζ_0 qui correspond au point $\bar{z} = 0$, et qui tend vers ω lorsque ζ sur la circonférence $|\zeta| = 1$, d'un côté ou de l'autre, tend vers le point ζ_0.

D'après la démonstration donnée par M. LINDELÖF dans le n° 18 du Mémoire cité, la fonction $F(\zeta)$ tend uniformément vers la valeur ω lorsque ζ tend vers ζ_0 par des valeurs intérieures au cercle $|\zeta| < 1$. Il en résulte que la fonction $f(z)$ tend uniformément vers cette même valeur-limite dans le domaine T lorsque z s'éloigne indéfiniment, comme nous l'avions avancé.

Dans le cas où la limite ω est infinie, on peut affirmer que la fonction $f(z)$ tend uniformément vers cette limite à l'intérieur du domaine T, si la fonction $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe et bornée dans la portion T' de ce domaine qui est extérieure à un certain cercle et continue sur le contour de T'.

Du théorème démontré découle le corollaire suivant:

Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers deux valeurs finies différentes ω' et ω'', elle ne saurait être bornée à l'intérieur de T.

En effet, dans le cas contraire, la fonction $\left(f(z) - \frac{\omega' + \omega''}{2}\right)^2$ serait également bornée dans T et tendrait sur Γ' et Γ'' vers

---

[1]) C. CARATHÉODORY: *Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis*, Math. Ann., Band 73, 1913.

Digitized by Google

la même limite $\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right)^2$. D'après la proposition précédente, elle tendrait donc uniformément vers cette limite dans T, d'où il suivrait que $f(z) - \frac{\omega' + \omega''}{2}$ tend uniformément vers l'une des valeurs $\pm \frac{\omega' - \omega''}{2}$ et, par suite, $f(z)$ soit vers ω' soit vers ω'', ce qui est évidemment en contradiction avec l'hypothèse admise.

12. Considérons maintenant une fonction monogène $f(z)$ qui se comporte comme une fonction méromorphe à l'intérieur et sur le contour du domaine T considéré, n'y admettant donc à distance finie d'autres singularités que des pôles. En nous servant de la fonction modulaire, nous allons démontrer quelques propositions intéressantes.

Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers la même limite ω sans tendre uniformément vers cette limite dans T lorsque z augmente indéfiniment, elle prend toute valeur (finie ou non), sauf deux valeurs au plus, en une infinité de points situés à l'intérieur de T.

Admettons qu'il existe trois valeurs distinctes a, b, c telles que chacune des équations $f(z) = a$, $f(z) = b$, $f(z) = c$ soit dépourvue de racines à l'intérieur de T. La fonction

$$f(z) = \frac{(b-c)(f(z)-a)}{(b-a)(f(z)-c)}$$

n'y prendra jamais les valeurs $0, 1, \infty$, et sur Γ' et Γ'' cette fonction tend vers la valeur $\bar{\omega} = \frac{(b-c)(\omega-a)}{(b-a)(\omega-c)}$.

Supposons d'abord que la valeur ω soit distincte des valeurs a, b, c de sorte que $\bar{\omega} \neq 0, 1, \infty$. Désignons par $y = \mu(x)$ la fonction modulaire et par $x = \nu(y)$ son inverse, qui donne la représentation conforme de l'intérieur d'une surface de Riemann à une infinité de feuillets, dont chacun admet les points $y = 0, 1, \infty$ comme points de ramification d'ordre infini, sur la moitié supérieure du plan des x. Si α désigne une valeur complexe dont la partie imaginaire est positive et $\bar{\alpha}$ sa valeur conjuguée, la fonction

Digitized by Google

$$\lambda(y) = \frac{\nu(y) - \alpha}{\nu(y) - \bar{\alpha}}$$

effectue la représentation conforme de la surface en question sur l'intérieur du cercle c_0 de rayon 1 décrit autour de l'origine comme centre.

Ceci posé, formons la fonction $\eta = \lambda(\bar{f}(z))$. Elle est holomorphe dans le domaine T, et son module y est inférieur à l'unité. De plus elle est continue sur le contour de ce domaine, et tend sur Γ' et Γ'' vers des valeurs-limites déterminées. En vertu du corollaire précédent, ces valeurs ne peuvent pas être différentes entre elles. La fonction $\lambda(\bar{f}(z))$ tend donc sur Γ' et Γ'' vers une même valeur η_0, et, d'après le théorème du n° précédent, on en conclut qu'elle tend uniformément vers η_0 dans l'intérieur de T. Mais puisque $\bar{\omega} \neq 0, 1, \infty$, le point η_0 est intérieur au cercle c_0, d'où l'on conclut que $\bar{f}(z)$ tend dans l'intérieur de T uniformément vers $\bar{\omega}$ et par suite $f(z)$ vers ω, ce qui contredit les hypothèses.

Supposons maintenant que la valeur ω se confond avec l'une des valeurs exclues a, b, c, qu'on ait par ex. $\omega = b$. La fonction $\bar{f}(z)$, qui ne prend aucune des valeurs $0, 1, \infty$ à l'intérieur de T, tend alors vers l'unité sur les courbes Γ' et Γ''. Mais, dans ces conditions, chacune des branches de la fonction $\sqrt{\bar{f}(z)}$ sera aussi holomorphe dans T et n'y prendra aucune des quatre valeurs $0, 1, -1, \infty$. Choisissons la branche qui sur Γ' tend vers la valeur -1, et considérons la fonction $\lambda(\sqrt{\bar{f}(z)})$. Elle tend sur les courbes Γ' et Γ'' vers des limites déterminées, qui se confondent nécessairement d'après le corollaire précédent. Donc $\lambda(\sqrt{\bar{f}(z)})$ tendrait uniformément vers cette même valeur à l'intérieur de T, et puisque le module de la valeur-limite en question est inférieur à l'unité, il s'ensuivrait que $\sqrt{f(z)}$ tend uniformément vers -1, et par suite $\bar{f}(z)$ vers $+1$ dans le domaine T. Nous arrivons donc encore à une contradiction.

Comme tout ce qui précède subsiste si l'on se borne à considérer la portion du domaine T extérieure à un cercle de rayon

Digitized by Google

arbitrairement grand, on conclut que $f(z)$ doit prendre toute valeur, sauf deux au plus, dans une infinité de points intérieurs à T. La démonstration de notre théorème est donc achevée.

Établissons encore cette proposition:

Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers des limites différentes, ω' et ω'', elle prendra toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points situés à l'intérieur de T.

En effet, s'il n'en était pas ainsi on arriverait, en conservant les notations précédentes, à cette conclusion que $\lambda(f(z))$ tend sur Γ' et Γ'' vers des valeurs différentes tout en restant bornée dans T, ce qui n'est pas possible d'après le corollaire du n° précédent.

En réunissant les résultats qui précèdent on peut donc énoncer cette proposition:

Soit T un domaine infini du plan des z limité par un seul contour sans points multiples, et désignons par Γ' et Γ'' les deux branches infinies de ce contour. Soit d'autre part $f(z)$ une fonction monogène n'admettant à l'intérieur et sur le contour du domaine T d'autres singularités à distance finie que des pôles.

Si cette fonction tend sur Γ' et Γ'' vers la même limite, ou bien elle tend uniformément vers cette limite dans T, lorsque z augmente indéfiniment, ou bien elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points compris dans T.

Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers des limites distinctes, elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points intérieurs à T.

Si ω est une valeur que la fonction $f(z)$ ne prend qu'en un nombre fini de points intérieurs à T, on peut conclure de la troisième proposition du n° 10 que ce domaine renferme un chemin de détermination ω.

On peut facilement trouver des fonctions jouissant des propriétés indiquées dans le théorème précédent et qui ne prennent jamais deux valeurs données. Choisissons comme domaine T la moitié supérieure du plan des z limitée par l'axe réel. La fonction e^{-z^2} tend sur cet axe vers la limite 0, et à l'intérieur du do-

Digitized by Google

maine T elle ne prend ni la valeur 0 ni la valeur ∞. Il en est de même de la fonction $e^{e^{-z^2}}$ qui, sur le contour du domaine T, tend vers la limite 1. Enfin la fonction

$$e^{\int_0^z e^{-z^2} dz}$$

tend sur l'axe réel positif vers la limite $e^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ (*cf.* p. 14), sur l'axe réel négatif vers la limite $e^{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$, et à l'intérieur de T elle est toujours distincte de 0 et de ∞.

13. Appliquons les résultats précédents à la fonction inverse $z = \varphi(w)$ de la fonction méromorphe $w = f(z)$. Reprenons à cet effet le domaine Δ du plan des z, ainsi que la branche correspondante $\varphi_\Delta(w)$ de la fonction $\varphi(w)$ (*voir* n° 8).

Supposons d'abord que $\varphi_\Delta(w)$ admet deux points transcendants ω' et ω'' et soient Γ' et Γ'' deux chemins de détermination ω' et ω'' resp., compris dans Δ. D'après les résultats que nous venons de démontrer, on peut choisir à l'extérieur de c une valeur w telle que, dans la partie du plan comprise entre les chemins Γ' et Γ'', l'équation $f(z) = w$ admette une infinité de racines, qui tendent nécessairement vers l'infini. Comme ces racines ne font pas partie de Δ, ce domaine présente donc entre Γ' et Γ'' soit un contour infini, soit une infinité de contours finis fermés. On en tire cette conséquence:

Si le domaine Δ ne présente qu'un nombre limité de contours, dont n sont infinis, la branche $\varphi_\Delta(w)$ possède au plus n points transcendants.

Si, au contraire, le domaine Δ est limité par un nombre infini de contours, soit fermés, soit infinis, on ne peut en général rien conclure concernant le nombre des points transcendants de $\varphi_\Delta(w)$. Signalons toutefois un cas particulier intéressant:

Si, quelque petit que soit le rayon r du cercle c de centre ω, le domaine Δ, supposé infini, ne présente que des contours fermés, la fonction inverse admet le point ω comme seul point transcendant.

Prenons une suite infinie de nombres $r_1, r_2, \ldots$ tels que

Digitized by Google

$$r > r_1 > \ldots > r_n > \ldots, \lim_{n=\infty} r_n = 0.$$

En vertu de l'hypothèse il n'existe qu'un seul domaine infini Δ_n correspondant à l'intérieur du cercle $|w - \omega| \leqq r_n$. D'après la remarque terminant le n° 8, ce domaine sera situé tout entier à l'extérieur d'un cercle C arbitrairement grand dès que n dépasse une certaine limite, et il admettra par suite un contour fermé γ_n renfermant l'origine. Prenons une suite infinie de points $z_n, z_{n+1}, \ldots$ situés respectivement sur les contours $\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots$, et joignons z_n et z_{n+1} par une ligne comprise dans Δ_n, z_{n+1} et z_{n+2} par une ligne comprise dans Δ_{n+1}, et ainsi de suite. Nous aurons ainsi formé un chemin de détermination ω, et $w = \omega$ est donc un point transcendant pour $\varphi(w)$.

S'il y avait outre ω un point transcendant ω' de cette fonction, il existerait dans le plan des z un chemin de détermination ω'. Si l'on choisit n assez grand pour que l'on ait $r_n < |\omega' - \omega|$, ce chemin serait, à partir d'un certain point, extérieur au domaine Δ_n, ce qui n'est pas possible puisque ce domaine ne présente que des contours fermés. La proposition est donc démontrée.

D'après le dernier théorème du n° 6, les points transcendants de la fonction inverse $\varphi(w)$ se confondent avec les valeurs asymptotiques de la fonction méromorphe $f(z)$. D'autre part nous avons vu que, entre deux chemins de déterminations distinctes, l'équation $f(z) = w$ admet une infinité de racines pour toute valeur donnée w, sauf deux valeurs au plus. L'ensemble des racines de l'équation $f(z) = w$ est dénombrable, puisque ces racines admettent $z = \infty$ comme seul point-limite. Mais de cela on ne peut pas conclure, comme l'a fait M. Boutroux [1]), que l'ensemble des points transcendants de la fonction inverse soit dénombrable. Et en effet, dans un Mémoire récent, M. Sire [2])

---

[1]) P. Boutroux: *Sur les singularités transcendantes des fonctions inverses de fonctions entières*, Comptes Rendus, Tome 149, 1909, p. 255.

[2]) J. Sire: *Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières*, Bull. de la Soc. Math. de France, Tome XLI, 1913.

Dans son beau Mémoire M. Sire a commis une inadvertance qu'il est facile

Digitized by Google

a réussi à former une fonction entière telle que les singularités transcendantes de son inverse constituent un ensemble de la puissance du continu.

V. Division de $\varphi_\Delta(w)$ en branches uniformes.

14. En reprenant les notations du n° 8, nous supposerons dès à présent que *la branche* $\varphi_\Delta(w)$ *de la fonction inverse* $z = \varphi(w)$ *présente le point* ω *comme point transcendant, et qu'elle n'en admet d'autres ni à l'intérieur ni sur la circonférence du cercle* c.

Désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les racines de l'équation

$$f(z) = \omega \tag{4}$$

comprises dans le domaine Δ, et par $e_{z_1}, e_{z_2}, \ldots, e_{z_n}, \ldots$ les éléments correspondants, réguliers ou algébriques, de la fonction inverse $z = \varphi(w)$; soient c_{z_n} le cercle de convergence de la série e_{z_n} et r_{z_n} son rayon. On a $r_{z_n} < r$ pour toute valeur n, sans quoi le domaine Δ serait fini, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous allons voir que *tout élément* e_{z_n} (*ou chaque détermination de* e_{z_n}, *si c'est un élément algébrique*) *définit une fonction holomorphe dans le cercle* c *muni d'un nombre fini de coupures.*

Si e_{z_n} est un élément algébrique, nous commençons par découper le cercle c suivant un rayon arbitraire; toute branche de e_{z_n} sera alors uniforme dans le cercle c_{z_n} ainsi découpé.

Considérons les racines $z^{(\nu)}$ de l'équation

$$f'(z) = 0$$

comprises dans Δ. Parmi les points correspondants $w^{(\nu)} = f(z^{(\nu)})$, supprimons d'abord ceux qui sont intérieurs à c_{z_n}, et prolongeons ensuite l'élément e_{z_n}, ou une de ses déterminations, suivant

---

de corriger. Dans la fonction $h(y)$ il faut en effet, pour avoir une fonction $f_{n,j}(y)$ répondant aux conditions requises, remplacer le nombre σ non pas par σ_n, comme le fait M. Sire, mais par $k\sigma_n$, k étant un nombre positif inférieur à $\frac{2}{\pi}$.

Digitized by Google

le rayon passant par un des points $w^{(\nu)}$ restants. Si l'on est arrêté par un point critique intérieur au cercle c, nous découperons ce cercle suivant le segment s du rayon envisagé compris entre le point critique et la circonférence de c. En procédant de même pour tous les points $w^{(\nu)}$ considérés, on obtient un domaine d_n à l'intérieur duquel l'élément e_{z_n} définit une fonction uniforme $\varphi_n(w)$. Or le nombre des coupures tracées est nécessairement limité. En effet, en vertu de l'hypothèse admise, l'élément e_{z_n} peut être prolongé suivant tout rayon donné du cercle c, jusqu'à son extrémité inclusivement, en contournant les points $w^{(\nu)}$ situés sur ce rayon. Il s'ensuit qu'il existe un angle renfermant ce rayon à l'intérieur duquel il n'y a aucun segment s, à moins qu'un segment s ne fasse partie du rayon considéré. Comme ceci a lieu pour tout rayon, le nombre des segments tracés est donc limité.

A l'intérieur du domaine d_n l'élément e_{z_n} définit donc une branche uniforme et holomorphe $\varphi_n(w)$ de la fonction inverse [1]). Cette branche donne la représentation conforme de l'intérieur de d_n sur l'intérieur d'un domaine fini δ_n du plan des z, contenu dans Δ et limité par des segments du contour γ de ce domaine et par des lignes σ correspondant aux coupures s. Toute racine simple de l'équation (4) comprise dans Δ est intérieure à un domaine δ_n, tandis qu'une racine d'ordre k fait partie des contours de k domaines δ_n contigus, qui, pris ensemble, renferment la racine comme point intérieur.

Deux domaines, δ_{n_1} et δ_{n_2}, correspondant à des éléments distincts, $e_{z_{n_1}}$ et $e_{z_{n_2}}$, ou à des déterminations différentes d'un même élément algébrique, n'ont aucune portion commune, ce qui résulte immédiatement du corollaire du n° 2.

15. Supposons maintenant qu'il existe à l'intérieur ou sur le contour de Δ un point z' dont l'entourage, quelque petit qu'il soit, renferme des portions d'une infinité de domaines δ_n. Puisque les lignes σ qui limitent ces domaines admettent z' comme

[1]) A un élément algébrique e_{z_n} à k branches correspondent k domaines d_n distincts.

Digitized by Google

point-limite, les coupures correspondantes s du cercle c s'accumulent vers le rayon r' qui traverse le point $w' = f(z')$. Prolongeons l'élément $e_{z'}$ de $\varphi(w)$ vers ω suivant r', en contournant les points algébriques par des demi-circonférences infiniment petites situées du même côté de r' que les coupures s considérées. Ce prolongement peut se faire jusqu'au point ω, puisque c'est, par hypothèse, le seul point transcendant de $\varphi_\Delta(w)$. Le point $z = \varphi(w)$ décrit alors une courbe ϱ' dont tous les points sont des points-limites d'une infinité de lignes σ. Comme, d'après le n° précédent, chaque racine z_n de l'équation (4) est comprise dans un domaine δ_n, ou dans l'ensemble d'un nombre fini de tels domaines, le point z ne peut pas tendre vers une valeur finie lorsque w tend vers ω. Il tend donc vers l'infini, d'où il suit que, *si les domaines δ_n admettent un point-limite à distance finie, il existe un élément de $\varphi_\Delta(w)$ tel que, lorsqu'on le prolonge vers ω suivant un rayon, le point correspondant z tend vers l'infini.*

En écartant désormais cette hypothèse particulière, nous distinguons deux cas suivant que les domaines δ_n remplissent ou non le domaine Δ tout entier.

Dans le premier cas la branche $\varphi_\Delta(w)$ de la fonction inverse se trouve par notre procédé subdivisée en branches uniformes $\varphi_n(w)$, dont l'ensemble épuise toute la branche $\varphi_\Delta(w)$. Les domaines d_n correspondant aux branches $\varphi_n(w)$ constituent les feuillets f_n de la surface F_Δ de Riemann sur laquelle $\varphi_\Delta(w)$ est uniforme, et dont les lignes de passage se confondent avec les coupures des domaines d_n. Puisqu'à chaque feuillet f_n correspond un domaine δ_n et un seul, on peut construire la surface F_Δ dès que ces domaines sont obtenus. Dans le cas que nous envisageons, cette surface n'admet que des points de ramification d'ordre fini. En particulier, le point ω est pour chaque branche un point régulier ou un point critique algébrique. Tout élément de $\varphi_\Delta(w)$ tend vers une valeur finie lorsqu'on le prolonge vers le point ω suivant un rayon, de quelque manière qu'on contourne les points algébriques.

Nous avons déjà reconnu que le cas où les domaines δ_n admettent des points-limites à distance finie constitue un cas

Digitized by Google

d'exception. Un autre cas exceptionnel se présente si le domaine Δ renferme un chemin allant à l'infini qui se compose d'un nombre illimité de segments des lignes σ et sur lequel $|f(z) - \omega|$ décroît constamment lorsque z s'éloigne vers l'infini. Le chemin correspondant du plan des w est évidemment un rayon, qui renferme une infinité de points algébriques de $\varphi_\Delta(w)$ admettant ω comme point-limite. Il existe dans ce cas un élément de $\varphi_\Delta(w)$ tel que, si on le prolonge vers ω suivant le rayon en contournant d'une certaine manière les points critiques algébriques, le point $z = \varphi(w)$ tend vers l'infini suivant le chemin en question intérieur à Δ.

Abordons le second cas, où les domaines δ_n ne remplissent pas le domaine Δ tout entier, et désignons par z' un point de Δ extérieur à tous les δ_n. D'après ce qui précède, nous pouvons supposer qu'il existe un voisinage du point z' qui est extérieur aux δ_n, mais intérieur à Δ. Dans ce voisinage on pourra trouver un point $\bar{z}$ tel que, sur le rayon $\bar{r}$ du cercle c passant par le point $\bar{w} = f(\bar{z})$, il n'y ait aucun point critique algébrique, sauf peut-être le point ω. Prolongeons l'élément $e_{\bar{z}}$ de $\varphi(w)$ vers ω suivant $\bar{r}$. Le prolongement est, par hypothèse, possible jusqu'à ce point; la courbe décrite par le point $z = \varphi(w)$ sera comprise dans Δ mais extérieure aux δ_n, et s'éloignera vers l'infini, puisque, dans cette partie de Δ, l'équation (4) est dépourvue de racines. Donc, *si les domaines δ_n ne remplissent pas complètement le domaine Δ, il y a un élément de $\varphi_\Delta(w)$ qui, prolongé suivant un rayon aboutissant à ω, tend vers l'infini.*

Il résulte du raisonnement précédent que le point z' fait partie d'un domaine infini connexe $\bar{\Delta}$, intérieur à Δ mais extérieur aux δ_n. Son contour $\bar{\gamma}$ se compose de segments du contour γ du domaine Δ correspondant à la circonférence c, et de lignes σ correspondant à des coupures s tracées dans ce cercle.

Le domaine Δ se trouve ainsi divisé en des domaines finis δ_n et des domaines infinis $\bar{\Delta}$.

16. Considérons un domaine $\bar{\Delta}$ quelconque. Désignons par $\bar{z}^{(\nu)}$ les zéros de $f'(z)$ contenus dans ce domaine et joignons les

Digitized by Google

points $\bar{w}^{(\nu)} = f(\bar{z}^{(\nu)})$ au point ω par des segments de droites $\bar{s}$. Prolongeons ensuite chaque détermination de l'élément algébrique $e_{\bar{z}^{(\nu)}}$ vers ω suivant le segment $\bar{s}$ issu de $\bar{w}^{(\nu)}$ jusqu'au premier point critique (qui est soit un autre point $\bar{w}^{(\nu)}$, soit le point ω). Procédant de cette manière pour chaque point $\bar{z}^{(\nu)}$, on définira dans $\bar{\Delta}$ un système de lignes $\bar{\sigma}$, correspondant aux segments $\bar{s}$, qui ne rencontrent pas la frontière $\bar{\gamma}$ de ce domaine.

Les lignes $\bar{\sigma}$, qui s'étendent évidemment à l'infini, divisent $\bar{\Delta}$ en des domaines distincts δ'_n dont chacun doit être infini, comme on le voit aisément en raisonnant comme au n° précédent. D'autre part, si on prolonge un élément de $\varphi(w)$ correspondant à un point intérieur à δ'_n vers la circonférence de c suivant le rayon issu du point w, z tend nécessairement vers un point de la frontière $\bar{\gamma}$ du domaine $\bar{\Delta}$. Tout domaine δ'_n est donc limité par deux systèmes de courbes[1]) n'ayant aucun point commun, dont l'un est formé par des lignes $\bar{\sigma}$ allant de l'infini à l'infini, et l'autre par des contours $\bar{\gamma}$. La frontière de chaque domaine δ'_n contient au moins un contour $\bar{\gamma}$, lequel est soit fermé soit infini. Si, en particulier, le domaine $\bar{\Delta}$ n'a qu'un seul contour, il ne contient aucun point $\bar{z}^{(\nu)}$, remarque dont nous aurons à faire usage dans la suite.

Soit maintenant $\bar{r}$ un rayon du cercle c qui ne traverse aucun point algébrique (sauf peut-être ω), et soit $\bar{w}$ son extrémité sur la circonférence c. Désignons par $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots$ les racines de l'équation $f(z) = \bar{w}$ situées sur le contour du domaine δ'_n. Les éléments correspondants $e_{\bar{z}_1}, e_{\bar{z}_2}, \ldots$ de $\varphi(w)$ peuvent être prolongés suivant $\bar{r}$ jusqu'au point ω, et l'on définira ainsi dans le plan des z un système de courbes infinies $\bar{\varrho}$, ne se coupant pas entre elles, qui divisent δ'_n en domaines infinis. Désignons par δ un de ces domaines, par $\varphi_\delta(w)$ la branche correspondante de la fonction inverse $\varphi(w)$.

Nous allons voir que la branche $\varphi_\delta(w)$ est uniforme. En effet, puisque le domaine δ est limité uniquement par des lignes γ, σ, $\bar{\sigma}$

[1]) Si le domaine $\bar{\Delta}$ ne renferme aucun point $\bar{z}^{(\nu)}$, il n'y a évidemment aucune ligne $\bar{\sigma}$.

Digitized by Google

et $\bar{\varrho}$, il est représenté par la fonction $w = f(z)$ sur un domaine d du plan des w qui est limité exclusivement par des arcs de la circonférence c et par des segments de droites tracées dans ce cercle suivant des rayons, et qui se trouve par suite étendu sur le cercle c ou sur un secteur de ce cercle. Comme le domaine δ ne renferme aucun zéro de $f'(z)$, la branche $\varphi_\delta(w)$ est holomorphe en tout point intérieur au domaine d et puisque, d'autre part, il est impossible d'effectuer un circuit fermé autour du point ω sans franchir la frontière du domaine d, ce domaine ne saurait couvrir aucune partie du plan plus d'une fois. Par suite la branche $\varphi_\delta(w)$ est uniforme.

Ceci posé, distinguons deux cas suivant que le contour du domaine δ contient un nombre fini ou une infinité de lignes σ.

Dans le premier cas le contour du domaine δ comprend, outre des lignes $\bar{\sigma}$ en nombre fini ou infini, un segment fini d'un contour $\bar{\gamma}$ et deux lignes $\bar{\varrho}$ partant de ses extrémités [1]). Si les lignes $\bar{\sigma}$ de la frontière de δ sont en nombre infini, les points correspondants $\bar{w}^{(\nu)}$ ne peuvent avoir que le point ω comme point-limite, car s'il y en avait un autre, celui-ci serait nécessairement un point transcendant de $\varphi_\Delta(w)$, ce qui est impossible. Le domaine δ se trouve donc représenté par la relation $w = f(z)$ sur le cercle c tout entier, muni d'un nombre fini ou infini de coupures. Désignons par δ_n un domaine δ de cette espèce.

Si le contour de δ contient un nombre infini de lignes σ, les points $w^{(\nu)}$ desquels partent les coupures correspondantes s admettent ω comme seul point-limite, et ces coupures s s'accumulent donc vers un rayon-limite $\bar{r}$ ou se confondent avec ce rayon. Le domaine d correspondant se réduit par suite à un secteur de cercle limité soit par $\bar{r}$ et un rayon-limite r, soit par deux rayons-limites $\bar{r}$ [2]). Désignons par $\bar{\delta}_n$ un domaine de cette espèce.

En appliquant ce procédé à chacun des domaines $\bar{\Delta}$ et de

[1]) Ces deux lignes $\bar{\varrho}$ peuvent bien se confondre, ce qui arrive lorsque l'équation $f(z) = \bar{w}$ admet une seule racine sur $\bar{\gamma}$. Dans ce cas $\varphi_\delta(w)$ prend les mêmes valeurs sur les deux bords de la coupure $\bar{r}$, qui peut donc être supprimée.

[2]) Dans des cas particuliers ce secteur pourra comprendre tout le cercle c.

Digitized by Google

leurs sous-domaines δ'_n, on aura le domaine Δ divisé en des domaines finis δ_n et des domaines infinis $\bar{\delta}_n$ et $\bar{\bar{\delta}}_n$. *Chacun de ces domaines correspond à une branche uniforme de $\varphi_\Delta(w)$, et la surface F_Δ de Riemann sur laquelle $\varphi_\Delta(w)$ est uniforme peut donc être construite dès que le domaine Δ sera divisé en domaines δ_n, $\bar{\delta}_n$ et $\bar{\bar{\delta}}_n$.* Tandis que les feuillets f_n et $\bar{f}_n$, correspondant aux domaines δ_n et $\bar{\delta}_n$, s'étendent sur tout le cercle c, chaque feuillet $\bar{\bar{f}}_n$, correspondant à un domaine $\bar{\bar{\delta}}_n$, couvre seulement un secteur de ce cercle et se rattache toujours à une infinité de feuillets f_n.

De ce qui précède on conclut que tout domaine $\bar{\delta}_n$ et $\bar{\bar{\delta}}_n$ est limité par un seul segment de $\bar{\gamma}$. De plus on voit que, si l'équation $f(z) = \omega$ est dépourvue de racines dans l'intérieur de Δ, ce domaine contient exclusivement des domaines $\bar{\bar{\delta}}_n$. Si cette condition est vérifiée et si Δ renferme une infinité de zéros de $f'(z)$, ce domaine admet nécessairement une infinité de contours γ, tandis qu'il n'admet qu'un seul contour si $f'(z)$ est différente de zéro dans Δ.

Puisque le domaine Δ s'étend à l'infini, il admet soit des contours infinis, soit un nombre infini de contours fermés. D'après ce qui a été dit, ce domaine contient donc ou des domaines δ_n ou des domaines $\bar{\bar{\delta}}_n$ en nombre illimité, d'où il suit que $\varphi_\Delta(w)$ admet une infinité de branches.

VI. Classification des points transcendants. Points transcendants directement critiques.

17. On doit à M. Boutroux une classification des singularités transcendantes des fonctions inverses des fonctions entières [1]), laquelle est, à notre connaissance, la seule entreprise jusqu'à présent. Le principe général qui a guidé M. Boutroux est

[1]) *Cf.* le Mémoire de M. Boutroux cité p. 13. *Voir* aussi le livre du même auteur: *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, Paris 1908.

Digitized by Google

l'étude des différents chemins dans le voisinage d'un point transcendant sur lesquels se permutent une infinité de déterminations de la fonction inverse [1]).

Il nous semble cependant qu'on puisse faire cette classification d'une manière plus naturelle. La méthode que nous allons suivre est, comme celle de M. Boutroux, fondée sur l'étude simultanée de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ dans le voisinage du point transcendant considéré, et de la fonction méromorphe $w = f(z)$ au voisinage de la singularité essentielle $z = \infty$. Nous sommes ainsi conduits tout naturellement à examiner à la fois la branche $\varphi_\Delta(w)$ de $\varphi(w)$ au voisinage du point transcendant $w = \omega$ et le domaine Δ du plan des z (*voir* la Section III). Mais nous allons encore étudier — et c'est ce qui constitue la différence principale entre notre méthode et celle de M. Boutroux — comment se comportent les diverses branches de $\varphi_\Delta(w)$ au point ω lui-même, en envisageant les racines de l'équation $f(z) = \omega$ comprises dans Δ. A cet égard il suffira évidemment de distinguer deux cas, suivant que cette équation y admet un nombre infini de racines ou n'en admet aucune, car, s'il y en avait un nombre fini, on pourrait réduire le cercle c à un cercle concentrique c_1 tel que, en tout domaine infini Δ_1 correspondant à c_1 et compris dans Δ, l'équation $f(z) = \omega$ soit dépourvue de racines (*cf.* la remarque terminant le n° 8).

En remontant successivement des cas les plus simples aux cas plus compliqués, nous tâcherons toujours d'illustrer les cas examinés par des exemples aussi simples que possibles, pris parmi les fonctions entières.

Les dénominations des différentes espèces de points transcendants que nous introduirons dans la suite ont été données par M. Boutroux, quoique nous les employions dans un sens légèrement modifié, qui nous semble d'ailleurs plus naturel.

---

[1]) *Cf.* par ex. *Leçons etc.*, p. 67 ainsi que la Note du même auteur: *Sur les fonctions inverses des fonctions entières*, Comptes Rendus, Tome 145, 1907, p. 1406.

Digitized by Google

18. Conservons toujours l'hypothèse fondamentale du n° 14 de la Section précédente, ainsi que les notations introduites dans cette Section.

La première classe de points transcendants que nous allons envisager est celle des points *directement critiques*, dont voici la définition :

Si aucune branche de $\varphi_\Delta(w)$ n'est finie au point ω, ce point est pour $\varphi_\Delta(w)$ un point transcendant DIRECTEMENT CRITIQUE.

Dans ce cas $\varphi_\Delta(w)$ tend vers l'infini lorsque w tend vers ω suivant un chemin *quelconque* intérieur au cercle c. Le domaine Δ, ne renfermant aucune racine de l'équation $f(z)=\omega$, se compose exclusivement de domaines infinis $\bar{\delta}_n$ (*cf.* page 38). Chaque feuillet de la surface F_Δ de Riemann admet le point ω comme point de ramification d'ordre infini.

Nous allons subdiviser les points directement critiques en deux espèces.

Considérons d'abord le cas où $\varphi_\Delta(w)$ n'admet dans le cercle c aucun point critique, en dehors du point transcendant ω. Celui-ci est alors assurément directement critique, car si une branche de $\varphi_\Delta(w)$ était finie au point ω, elle y serait ou holomorphe ou algébrique, et puisqu'elle est, par hypothèse, holomorphe en tout autre point intérieur à c, elle devrait donc épuiser la branche $\varphi_\Delta(w)$ toute entière, ce qui est impossible.

Le domaine Δ n'admet dans ce cas qu'un seul contour γ, qui s'étend à l'infini, et se compose d'une infinité de domaines δ_n, dont chacun est limité par un segment fini de γ et deux lignes infinies $\bar{\varrho}$. La surface F_Δ n'admet d'autres points de ramification que le point ω, qui est un *point logarithmique*.

Un point jouissant de ces propriétés sera dit un point transcendant directement critique *de première espèce*. Donc :

Si $\varphi_\Delta(w)$ n'admet dans le cercle c d'autres points critiques que le point transcendant ω, celui-ci est un point directement critique DE PREMIÈRE ESPÈCE.

Les points transcendants $w=0$ et $w=\infty$ de la fonction $z=\log w$, inverse de la fonction entière $w=e^z$, rentrent dans

Digitized by Google

cette classe. Le domaine Δ, correspondant à l'intérieur d'un cercle c autour du point $w = 0$, est formé par le demi-plan situé à gauche d'une parallèle à l'axe imaginaire; les domaines $\bar{\delta}_n$ sont limités par un segment de cette parallèle de longueur 2π et par deux parallèles à l'axe réel partant des extrémités de ce segment.

19. De ce qui précède on conclut que, *si le point transcendant ω n'est pas un point directement critique de première espèce, il est nécessairement point-limite d'une infinité de points critiques algébriques de $\varphi_\Delta(w)$*. En effet, si ω n'est pas point-limite de singularités algébriques, on peut tracer un cercle c_1 concentrique à c dans lequel $\varphi_\Delta(w)$ n'admet aucun point critique en dehors de ω. Pour chaque branche de $\varphi_\Delta(w)$ définie dans c_1 et admettant ω comme point transcendant, ce point sera donc un point directement critique de première espèce.

Les points directement critiques *de seconde espèce* seront donc définis comme il suit:

Si aucune branche de $\varphi_\Delta(w)$ n'est finie au point ω, et si ce point est point-limite d'une infinité de points critiques algébriques de $\varphi_\Delta(w)$, il sera appelé point transcendant directement critique DE SECONDE ESPÈCE.

Comme il a été dit au n° 16 (page 38), le domaine Δ admet dans ce cas une infinité de contours γ, et parmi les domaines $\bar{\delta}_n$ il y a une infinité dont le contour, outre un segment de γ et deux lignes $\bar{\varrho}$, contient des lignes $\bar{\sigma}$. Parmi les feuillets f_n de la surface F_Δ, il pourra bien y en avoir qui admettent le point ω comme seul point de ramification, et qui sont donc raccordés à d'autres feuillets seulement le long du rayon $\bar{r}$. Mais il existe toujours un nombre infini de feuillets présentant aussi des points de ramification d'ordre fini. Parmi ces feuillets il peut y en avoir qui n'admettent pas le rayon $\bar{r}$ comme ligne de passage, comme nous l'avons signalé dans la première note de la page 37.

20. Considérons comme application la fonction entière

$$w = f(z) = z \sin z.$$

Digitized by Google

Puisque cette fonction croît indéfiniment sur tout rayon distinct de l'axe réel, son inverse $z = \varphi(w)$ admet $w = \infty$ comme point transcendant (*cf.* la note p. 23). Désignons par C un cercle de rayon R décrit dans le plan des w autour de l'origine comme centre, par Δ un domaine du plan des z correspondant à la portion infinie D du plan des w extérieure à C, et par Δ' un domaine correspondant à l'intérieur de ce cercle.

Construisons de $z = 0$ comme centre un carré Q_h dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et de longueur $(2h+1)\pi$, h étant un entier positif. On a sur le périmètre de ce carré $|\sin z| \geqq 1$, d'où il suit

$$|f(z)| \geqq |z| \geqq \left(h + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

On en conclut d'abord que $f(z)$ n'admet aucune valeur asymptotique finie, et que, par suite, $w = \infty$ est le seul point transcendant de $\varphi(w)$.

D'autre part, il suit de l'inégalité ci-dessus que tout domaine donné Δ' est intérieur au carré Q_h dès que h est suffisamment grand. Chacun de ces domaines Δ' est donc fini. Il y en a d'ailleurs une infinité, puisque $f(z)$ admet une infinité de zéros, à savoir les points $z = n\pi$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Enfin on voit qu'il n'existe qu'un seul domaine Δ, comprenant toute la partie du plan des z qui est extérieure aux domaines Δ'.

Puisque $f(z)$, étant une fonction entière, ne prend jamais la valeur ∞, le point $w = \infty$ est directement critique pour $\varphi(w)$, et il est de seconde espèce puisque le domaine Δ admet une infinité de contours γ.

Abordons la division de Δ en domaines δ_n (*cf.* n° 16). On voit facilement que tout contour γ renferme un seul zéro de $f(z)$, sauf le contour γ_0 entourant l'origine, qui en contient toujours un nombre pair, $2m$, puisque le point $z = 0$ est un zéro double et que $f(z)$ est une fonction paire. D'ailleurs le nombre m croît indéfiniment avec R.

La dérivée

$$f'(z) = \sin z + z \cos z$$

Digitized by Google

s'évanouit pour les valeurs $z^{(\nu)}$ qui annulent la fonction $z + \operatorname{tang} z$. Nous allons voir qu'elles sont toutes réelles. Considérons en effet un carré Q_k de centre $z = 0$ dont les côtés, parallèles aux axes, ont la longueur $2k\pi$, k étant un entier positif. Lorsque le point z parcourt le périmètre de Q_k dans le sens direct, l'argument de la fonction $z + \operatorname{tang} z = z\left(1 + \frac{\operatorname{tang} z}{z}\right)$ prend l'accroissement 2π, puisqu'on a sur ce périmètre $\left|\frac{\operatorname{tang} z}{z}\right| < 1$. Or cette fonction admet dans Q_k $2k$ pôles simples, à savoir les points $\pm\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$ et $2k + 1$ zéros réels simples, car elle s'évanouit au point $z = 0$ et en un point de chacun des intervalles $\pm\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$ de l'axe réel. A l'intérieur de Q_k cette fonction n'admet donc aucun zéro complexe. Ceci restant valable quelque grand que soit k, notre assertion est donc vraie.

Désignons par $\ldots, z^{(-1)}, z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots$ les racines de l'équation $f'(z) = 0$, rangées dans une suite croissante, en posant $z^{(0)} = 0$. De l'équation $z + \operatorname{tang} z = 0$ on peut conclure que

$$z^{(\pm\nu)} = \pm\left[\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon(\nu)\right], \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

où $0 < \varepsilon(\nu) < \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\nu = \infty} \varepsilon(\nu) = 0$.

Les valeurs

$$w^{(\nu)} = z^{(\nu)} \sin z^{(\nu)} = (-1)^{\nu - 1} \frac{(z^{(\nu)})^2}{\sqrt{1 + (z^{(\nu)})^2}}$$

sont toutes réelles et alternativement positives et négatives; leurs modules augmentent constamment et tendent vers l'infini avec $|\nu|$. On a d'ailleurs $w^{(0)} = 0$ et $w^{(\nu)} = w^{(-\nu)}$.

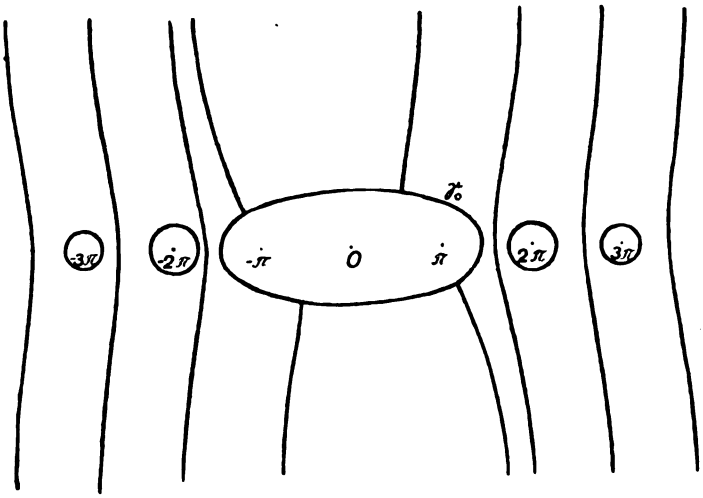
Ainsi les points critiques algébriques $w^{(\nu)}$ de la fonction inverse admettent l'infini comme seul point-limite.

Comme la dérivée seconde

$$f''(z) = 2\cos z - z \sin z = \cos z\,(2 - z \operatorname{tang} z)$$

ne s'évanouit pas aux points $z = z^{(\nu)}$, pour lesquels $\operatorname{tang} z = -z$, il se permute autour de chacun des points $w^{(\nu)}$ deux branches seulement de $\varphi(w)$.

Digitized by Google



Ceci posé, traçons dans le domaine D les demi-droites $\bar{s}$ joignant les points $w^{(\nu)}$ situés sur l'axe réel positif (et contenus dans D) à $+\infty$ et les points $w^{(\nu)}$ de l'axe réel négatif à $-\infty$. Les lignes $\bar{\sigma}$ correspondantes traversent les points $z^{(\nu)}$ intérieurs à Δ et s'étendent dans les deux directions à l'infini, symétriquement à l'axe réel, comme l'indique la figure schématique ci-dessus. Chacun des domaines δ'_n en lesquels le domaine Δ se trouve divisé par les lignes $\bar{\sigma}$ est limité par deux lignes $\bar{\sigma}$ et par une courbe fermée γ. Tout domaine δ'_n, sauf celui qui est limité par γ_0 et que nous désignerons par δ'_0, est représenté par la fonction $w = f(z)$ sur l'intérieur du domaine D simplement couvert, découpé suivant deux lignes $\bar{s}$, et jouit ainsi des propriétés des domaines δ_n du n° 16 (*cf.* la premiére note p. 37). Désignons par $\delta_{\nu+1}$ et $\delta_{-(\nu+1)}$ les domaines qui sont limités par les lignes $\bar{\sigma}$ traversant les points $z^{(\nu)}$ et $z^{(\nu+1)}$, resp. $z^{(-\nu)}$ et $z^{(-(\nu+1))}$ $(\nu = m, m+1, \ldots)$.

Il nous reste encore à diviser le domaine δ'_0 en domaines δ_n (*cf.* page 37). Pour cela joignons un point $\bar{w}$ non réel de la circonférence C, soit le point $\bar{w} = iR$ à l'infini par le rayon $\bar{r}$ passant par ce point. Les lignes correspondantes $\bar{\varrho}$ divisent δ'_0 en domaines δ_n, dont le nombre est $2m$ puisque, sur γ_0, l'équation $f(z) = \bar{w}$ admet évidemment $2m$ racines. Parmi ces domaines,

Digitized by Google

$\bar{\delta}_m$ et $\bar{\delta}_{-m}$, qui sont contigus aux domaines $\bar{\delta}_{m+1}$ et $\bar{\delta}_{-(m+1)}$ considérés plus haut, sont limités par un segment de γ_0, deux lignes $\bar{\varrho}$ et une ligne $\bar{\sigma}$, tandis que chacun des autres domaines, $\bar{\delta}_{-(m-1)}, \ldots, \bar{\delta}_{-1}, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_{m-1}$, est limité seulement par un segment de γ_0 et deux lignes $\bar{\varrho}$.

Pour construire la surface F_Δ de Riemann sur laquelle $\varphi_\Delta(w)$ est uniforme, partons de $2m$ feuillets $\bar{f}_{-m}, \ldots, \bar{f}_{-1}, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ étendus sur D et découpés suivant le rayon $\bar{r}$. Relions ces feuillets entre eux deux à deux, comme au voisinage d'un point algébrique. Traçons ensuite dans les feuillets $\bar{f}_m$ et $\bar{f}_{-m}$ les coupures $\bar{s}$ joignant les points superposés $w^{(m)}$ et $w^{(-m)}$ à l'infini, et raccordons à chacun d'eux un feuillet, $\bar{f}_{m+1}$ resp. $\bar{f}_{-(m+1)}$, muni de la même coupure. Découpons ensuite $\bar{f}_{m+1}$ et $\bar{f}_{-(m+1)}$ suivant la ligne $\bar{s}$ issue des points superposés $w^{(m+1)}$ et $w^{(-(m+1))}$, et rattachons à chacun d'eux un feuillet, f_{m+2} resp. $f_{-(m+2)}$, admettant la même coupure, et ainsi de suite.

Tous les feuillets de F_Δ admettent le point à l'infini comme point de ramification d'ordre infini, mais il n'y a que $2(m-1)$ feuillets qui n'en admettent pas d'autre. Comme nous l'avons dit plus haut, toute courbe γ du plan des z correspondant au cercle $|w| = R$ est fermée, quel que soit R. Il s'ensuit que, si le point w, partant d'un point de la surface F_Δ, décrit un chemin quelconque entourant l'origine qui se ferme dans le plan des w, il reviendra après un nombre fini de tours à son point de départ, n'ayant ainsi traversé qu'un nombre fini de feuillets, bien que $w = \infty$ soit un point de ramification d'ordre infini pour chaque feuillet de la surface F_Δ. Tout chemin qui traverse une infinité de feuillets doit donc se rapprocher indéfiniment du point $w = \infty$.

En prenant $R = 0$, nous aurions obtenu la surface complète F pour la fonction inverse $z = \varphi(w)$. Elle présente de grandes analogies avec la surface connue de Riemann correspondant à la fonction $\arcsin w$, n'admettant comme celle-ci aucun feuillet muni d'une seule coupure.

Digitized by Google

VII. Points transcendants indirectement critiques.

21. Nous arrivons maintenant au cas où il y a une infinité de branches de $\varphi_\Delta(w)$ qui sont finies au point ω. Le domaine Δ renferme alors un nombre infini de racines de l'équation $f(z) = \omega$, et par suite une infinité de domaines finis δ_n (*cf.* p. 33). D'après le n° 19, le point ω est un point-limite d'une infinité des points critiques algébriques de $\varphi_\Delta(w)$.

La plus simple espèce de points transcendants qui puisse se présenter dans ces conditions, est celle des points *indirectement critiques*, dont nous donnerons la définition suivante:

Si tout élément de $\varphi_\Delta(w)$ tend vers une valeur finie lorsqu'on le prolonge vers ω suivant un rayon, de quelque manière qu'on contourne les points critiques algébriques, le point ω sera appelé un point transcendant INDIRECTEMENT CRITIQUE.

Les domaines δ_n remplissent complètement le domaine Δ, sans y admettre aucun point-limite à distance finie. D'après le n° 15 (*cf.* page 35) le domaine Δ ne peut renfermer aucun chemin allant à l'infini et composé d'une infinité de segments des lignes σ, sur lequel $|f(z) - \omega|$ décroît constamment. La surface F_Δ de Riemann n'admet dans ce cas que des points de ramification d'ordre fini, comme il a été dit au n° cité, et *chaque branche de $\varphi_\Delta(w)$ est holomorphe ou algébrique au point ω*. Tout chemin de la surface F_Δ qui correspond à un chemin de détermination ω compris dans Δ doit nécessairement traverser une infinité de feuillets de F_Δ, en tournant par suite autour d'un nombre infini de ses points de ramification.

22. En serrant les hypothèses, on peut obtenir un résultat un peu plus précis. Supposons que les points algébriques $w^{(\nu)}$ de $\varphi_\Delta(w)$ situés dans le cercle c et sur sa circonférence n'admettent d'autres points-limites que ω, et qu'il n'y ait parmi ces points aucun, sauf peut-être ω, qui soit critique pour une infinité de branches de $\varphi_\Delta(w)$, c'est-à-dire auquel corresponde une infinité de points $z^{(\nu)}$ intérieurs à Δ. Supposons de plus que ce domaine ait au moins un contour infini γ. Dans ces hypothèses nous al-

Digitized by Google

lons démontrer qu'*il existe un chemin en forme de spirale, G, convergeant vers le point ω, tel qu'une infinité d'éléments de $\varphi_\Delta(w)$, correspondant à un certain point de G, tendent vers l'infini lorsqu'on les prolonge vers ω suivant ce chemin* [1]).

Pour la démonstration choisissons une suite infinie de cercles $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ concentriques à c, dont les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ décroissent vers zéro, et menons suivant un rayon une coupure qui transforme les couronnes $(c, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, c_{n+1}), \ldots$ en des domaines simplement connexes $k, k_1, \ldots, k_n, \ldots$. Traçons enfin un rayon $\bar{r}$ distinct du premier, et désignons par $\bar{w}, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_n, \ldots$ les points où il rencontre les circonférences $c, c_1, \ldots, c_n, \ldots$.

Le domaine Δ admet, par hypothèse, un contour infini γ, et sur ce contour l'équation $f(z) = w$ a nécessairement un nombre infini de racines (*cf.* n° 8, p. 17). Prenons l'une de ces racines et désignons par $e^{(1)}$ l'élément correspondant de $\varphi(w)$. Si l'on prolonge cet élément suivant la circonférence c dans un sens quelconque, soit le sens direct, en contournant les points critiques algébriques par des arcs compris dans c, on reviendra au point $\bar{w}$ avec des déterminations toujours nouvelles de $\varphi(w)$, $e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots, e^{(p)}, \ldots$.

Par hypothèse, la couronne (c, c_1) ne renferme qu'un nombre fini de points critiques $w^{(\nu)}$ de $\varphi_\Delta(w)$, et les racines correspondantes de l'équation $f'(z) = 0$ sont également en nombre fini. Donc il n'y a qu'un nombre fini de branches de $\varphi_\Delta(w)$ qui admettent les points $w^{(\nu)}$ de la couronne (c, c_1) comme points critiques, et il existe par suite un nombre p_0 tel que chacun des éléments $e^{(p_0+1)}, e^{(p_0+2)}, \ldots$ définit une fonction uniforme dans l'intérieur et sur le contour du domaine k.

Prolongeons maintenant l'élément $e^{(p_0+1)}$ suivant le rayon $\bar{r}$, et désignons par $e_1^{(1)}$ l'élément qu'on obtient ainsi au point $\bar{w}_1$. Si l'on prolonge $e_1^{(1)}$ le long de c_1 dans le sens direct, on revient

---

[1]) Dans les recherches de M. Boutroux sur les points transcendants les chemins-spirales jouent un rôle important (*cf.* par ex. *Sur l'indétermination etc.* p. 332).

Digitized by Google

successivement au point $\bar{w}_1$ avec des éléments $e_1^{(2)}, e_1^{(3)}, \ldots$ qui sont tous différents entre eux, puisqu'ils proviennent des éléments $e^{(p_0+2)}, e^{(p_0+3)}, \ldots$ en les prolongeant suivant le rayon $\bar{r}$ (*cf.* la remarque p. 11). Donc, lorsque le point w parcourt c_1 dans le sens direct, le point z décrit un chemin infini γ_1, qui limite ainsi un domaine infini Δ_1 intérieur à Δ et correspondant à l'intérieur du cercle c_1.

Continuons maintenant le même procédé, en prolongeant d'abord $e_1^{(1)}$ suivant c_1 dans le sens direct un nombre p_1 de fois, suffisamment grand pour que les éléments $e_1^{(p_1+1)}, e_1^{(p_1+2)}, \ldots$ soient tous holomorphes dans l'intérieur et sur le contour de k_1, puis prolongeons l'élément $e_1^{(p_1+1)}$ le long du rayon $\bar{r}$ jusqu'au point $\bar{w}_2$, ensuite l'élément ainsi obtenu suivant la circonférence c_2 dans le sens direct, et ainsi de suite indéfiniment.

Le chemin G ainsi construit dans le plan des w est une spirale tendant vers ω. Le chemin correspondant Γ du plan des z, quelque grand qu'on se donne le nombre n, sera, à partir d'un certain de ses points, compris tout entier à l'intérieur d'un domaine infini Δ_n correspondant à l'intérieur du cercle c_n. D'après la dernière remarque du n° 8, Γ s'étend donc à l'infini. Enfin, si au lieu de $e^{(1)}$ on prolonge l'un des éléments $e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots$ suivant le même chemin G, on voit que z converge toujours vers l'infini lorsque w tend vers ω. La proposition énoncée se trouve ainsi complètement démontrée.

Puisque l'équation $f(z) = \omega$ a dans l'intérieur de Δ un nombre infini de racines, il existe évidemment aussi une infinité d'éléments de $\varphi_\Delta(w)$ qui tendent vers des valeurs finies lorsque w tend vers ω suivant G.

23. Un exemple d'un point transcendant indirectement critique nous est donné par l'inverse $z = \varphi(w)$ de la fonction entière

$$w = f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Puisque la fonction $f(z)$ tend vers zéro sur l'axe réel et vers l'infini sur tout autre rayon issu de l'origine, $\varphi(w)$ admet $w = 0$

Digitized by Google

et $w = \infty$ comme points transcendants. Nous pouvons facilement montrer qu'il n'y en a pas d'autres. En effet, autrement il existerait un chemin allant à l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers une valeur finie, distincte de zéro. Ce chemin resterait nécessairement, à partir d'un certain point, compris dans un angle arbitrairement petit renfermant la partie positive ou négative de l'axe réel, et, d'autre part, il ne rencontrerait l'axe réel qu'un nombre limité de fois. Or, sur un tel chemin, l'argument de z reste borné, tandis que l'argument de $\sin z$ dépasse toute limite, de sorte que $f(z)$ n'y saurait tendre vers une valeur finie, distincte de zéro.

Les points critiques algébriques $w^{(\nu)}$ de $\varphi(w)$ sont définis par les relations

$$f'(z^{(\nu)}) = \frac{\cos z^{(\nu)}}{z^{(\nu)}} - \frac{\sin z^{(\nu)}}{(z^{(\nu)})^2} = 0 \text{ ou } \operatorname{tang} z^{(\nu)} = z^{(\nu)},$$

$$w^{(\nu)} = \frac{\sin z^{(\nu)}}{z^{(\nu)}}.$$

En raisonnant comme au n° 20, on voit que les valeurs $z^{(\nu)}$ sont toutes réelles. On a d'ailleurs $z^{(0)} = 0$ et

$$z^{(\pm\nu)} = \pm\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi - \varepsilon(\nu)\right], \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

où $0 < \varepsilon(\nu) < \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon(\nu) = 0$.

Les valeurs $w^{(\nu)}$ sont donc aussi réelles et alternativement positives et négatives, et convergent vers zéro lorsque $|\nu|$ croît indéfiniment. D'ailleurs on a $w^{(0)} = 1$, $|w^{(\nu)}| < 1$ si $\nu \neq 0$, et $w^{(\nu)} = w^{(-\nu)}$, tandis que $w^{(\nu_1)} \neq w^{(\nu_2)}$ si $|\nu_1| \neq |\nu_2|$.

La dérivée seconde

$$f''(z) = -\frac{\sin z}{z} - \frac{2\cos z}{z^2} + \frac{2\sin z}{z^3} = \cos z\left(-\frac{\operatorname{tang} z}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2\operatorname{tang} z}{z^3}\right)$$

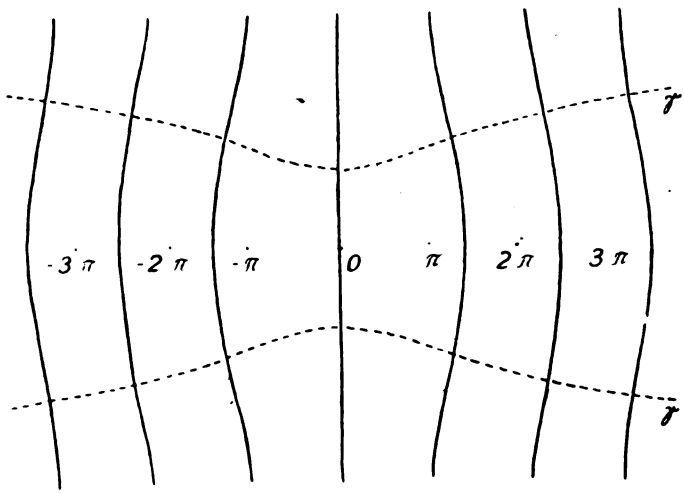
étant distincte de zéro aux points $z^{(\nu)}$, pour lesquels $\operatorname{tang} z = z$, il se permute autour de chacun des points $w^{(\nu)}$ deux branches seulement de $\varphi(w)$.

Puisque $w = \infty$ est un point transcendant isolé pour $\varphi(w)$ et que la fonction $f(z)$, étant une fonction entière, ne prend jamais

Digitized by Google

la valeur ∞, le point $w = \infty$ est directement critique, et d'ailleurs de première espèce, puisqu'il n'est pas point-limite des points algébriques de $\varphi(w)$.

Décrivons maintenant dans le plan des w un cercle c de rayon r ayant l'origine comme centre. Puisque $|f(z)| \leq 1$ pour toute valeur réelle de z, on voit que, si $r > 1$, à l'intérieur du cercle c correspond un domaine infini Δ renfermant l'axe réel tout entier et limité par deux courbes infinies γ. Si $r < 1$, on aura deux domaines infinis Δ, chacun limité par un seul contour, et un nombre limité de domaines finis Δ.



Supposons, pour fixer les idées, qu'on a $r > 1$. Le domaine Δ renferme tous les zéros de $f(z)$, à savoir les points $n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$), lesquels sont séparés par les points $z^{(\nu)}$. Joignons les points $w^{(\nu)}$ à la circonférence c par des segments s de l'axe réel qui ne traversent pas l'origine, et cherchons les lignes σ correspondantes du plan des z. Ces lignes font évidemment partie de la courbe sur laquelle la fonction $f(z)$ est réelle. Si l'on pose $z = x + iy$, $w = u + iv$, on trouve

$$u = \frac{y \cos x \sinh y + x \sin x \cosh y}{x^2 + y^2},$$

$$v = \frac{x \cos x \sinh y - y \sin x \cosh y}{x^2 + y^2}.$$

Digitized by Google

La courbe en question est donc représentée par la relation $v = 0$ ou

$$x \cos x \sinh y = y \sin x \cosh y.$$

Cette équation est vérifiée sur les axes des coordonnées, ainsi que sur la courbe représentée par l'équation

$$x \cot x = y \coth y, \tag{20}$$

qui se déduit de l'équation précédente en la divisant par $\sin x \sinh y$. Cette courbe admet une infinité de branches symétriques par rapport aux axes et passant par les points $z^{(\nu)}$. Chacune des bandes infinies $n\pi < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi < x < -n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ contient une de ces branches et une seule, qui tend vers la droite $x = n\pi$ resp. $x = -n\pi$ lorsque $|y|$ croît indéfiniment, tandis que les bandes restantes du plan ne contiennent aucun point de cette courbe.

Les lignes σ sont les segments de l'axe imaginaire et de la courbe (20) qui sont intérieurs à Δ. Ces lignes divisent le domaine Δ en domaines δ_n (*cf.* p. 33) dont chacun est limité par deux segments de γ et par deux lignes consécutives σ, comme nous l'avons esquissé dans la figure ci-dessus.

Lorsque le point z s'éloigne à l'infini dans l'intérieur de Δ, il traverse nécessairement une infinité de domaines δ_n. Il s'ensuit que toute branche de $\varphi_\Delta(w)$ tend vers une valeur finie lorsque w tend vers zéro suivant un rayon, et que $w = 0$ est par suite un point transcendant indirectement critique. Il appartient d'ailleurs à l'espèce particulière étudiée au n° précédent.

Si l'on fait tendre r vers l'infini, les domaines δ_n se transforment en des domaines infinis, dans lesquels la fonction $f(z)$ prend toute valeur finie une fois et une seule. Nous sommes donc en état de construire la surface complète F de Riemann sur laquelle la fonction $\varphi(w)$ est uniforme.

Afin d'avoir une conception plus nette de cette surface F, partons de la surface connue F' correspondant à la fonction arc sin w. Chaque feuillet de F' est découpé suivant l'axe réel depuis $+1$ à $+\infty$ et depuis -1 à $-\infty$. Désignons par $\ldots, P_{-1},$

Digitized by Google

P_0, P_1, P_2, ... ses points de ramification successifs, lesquels coïncident alternativement avec les points $w = +1$ et $w = -1$ (P_0 coïncide avec le point $+1$). Pour construire la surface F, on n'aura qu'à déplacer les points de ramification de F' suivant l'axe réel de sorte que chaque point P_ν vienne se confondre avec le point $w^{(\nu)}$ de même indice.

On voit aisément qu'il existe sur la surface F un nombre infini de chemins-spirales superposés tendant vers l'origine, qui parcourent une infinité de feuillets de cette surface F, comme l'exige la proposition du n° précédent.

VIII. Points transcendants directement et indirectement critiques.

24. Tout point transcendant de $\varphi(w)$ qui satisfait à la condition fondamentale du n° 14, sans entrer sous les définitions précédentes, sera appelé point transcendant *directement et indirectement critique*. Nous avons donc cette définition:

Si, quelque petit que soit le rayon r du cercle c, il existe une branche de $\varphi_\Delta(w)$ qui est finie au point ω, mais d'autre part aussi un élément de $\varphi_\Delta(w)$ qui tend vers l'infini lorsqu'on le prolonge vers ω suivant un rayon, en contournant d'une manière convenable les points critiques algébriques, le point ω est dit un point transcendant DIRECTEMENT ET INDIRECTEMENT *critique pour $\varphi_\Delta(w)$.*

D'après le n° 17 le domaine Δ renferme une infinité de racines de l'équation $f(z) = \omega$ et par suite une infinité de domaines δ_n. Par hypothèse, il existe un chemin infini Γ intérieur à Δ et tel que, lorsque z s'éloigne indéfiniment sur ce chemin, le point correspondant $w = f(z)$ tend vers ω suivant un rayon, en le parcourant toujours dans le même sens. Ce chemin Γ ne peut avoir aucun point intérieur à un domaine δ_n.

Si les domaines δ_n remplissent complètement le domaine Δ, l'un ou l'autre des cas exceptionnels envisagés au n° 15 doit se présenter. Comme il a été dit au n° cité, la surface F_Δ de

Digitized by Google

Riemann n'admet dans ces cas que des points de ramification d'ordre fini, et chaque branche de $\varphi_\Delta(w)$ est holomorphe ou algébrique au point ω.

Dans le cas général le domaine Δ renferme, en dehors des domaines δ_n, encore des domaines $\bar{\delta}_n$ et δ_n (*cf.* p. 37) en nombre fini ou infini, et l'on voit que la surface F_Δ peut présenter des formes très variées. Cependant elle admet toujours un nombre illimité de feuillets f_n correspondant aux domaines δ_n, qui ne présentent qu'un nombre fini de points de ramification, chacun de ces points étant d'ordre fini. Les feuillets f_n correspondant aux domaines $\bar{\delta}_n$ peuvent admettre un nombre fini ou infini de points de ramification, parmi lesquels figure toujours le point ω. Enfin les feuillets f_n correspondant aux δ_n ne couvrent qu'un secteur de c, et chacun d'eux est rattaché à une infinité des feuillets f_n, de telle sorte qu'une infinité des lignes de passage tendent vers l'un des rayons limitant ce secteur ou se confondent avec ce rayon.

25. Nous allons considérer comme exemples deux fonctions entières très simples, dont la première est

$$w = f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Cette fonction tend vers zéro sur tout chemin s'éloignant à l'infini dans le demi-plan situé à gauche d'une parallèle quelconque à l'axe imaginaire, tandis qu'elle tend vers l'infini sur tout rayon issu de l'origine et compris dans le demi-plan droit. La fonction inverse $z = \varphi(w)$ admet donc les points transcendants $w = 0$ et $w = \infty$.

Nous ferons voir qu'elle n'en admet pas d'autres. En effet, si, sur un chemin Γ allant à l'infini, $f(z)$ tendait vers une valeur finie distincte de zéro, la fonction $\frac{e^z}{z} = f(z) + \frac{1}{z}$ tendrait vers cette même valeur et par suite e^z vers l'infini. Le chemin Γ est donc, à partir d'un certain point, compris dans le demi-plan droit, d'où il suit que, si l'on pose $z = x + iy = \varrho e^{i\psi}$, ψ reste borné sur ce chemin. Or la relation $\arg \frac{e^z}{z} = y - \psi$ montre que

Digitized by Google

y doit aussi rester bornée sur Γ, puisque dans le cas contraire $\frac{e^z}{z}$ ne saurait tendre vers une valeur finie distincte de zéro. Mais, sur un chemin Γ jouissant de ces propriétés, la fonction $f(z)$ tend nécessairement vers l'infini. Donc 0 et ∞ sont bien les seuls points transcendants de la fonction inverse.

Sur l'axe réel la fonction $f(z)$ va toujours en croissant par des valeurs réelles, de 0 à $+\infty$ lorsque z parcourt cet axe de gauche à droite. On a, en effet

$$f'(z) = \frac{e^z(z-1)+1}{z^2},$$

et comme cette expression ne s'évanouit pour aucune valeur réelle, la dérivée $f'(z)$ garde sur tout l'axe réel le même signe, qui est évidemment le signe *plus*.

Il y a donc sur l'axe réel un point et un seul, P, pour lequel $|f(z)| = r$, et par suite il existe certainement un domaine infini Δ, correspondant à l'intérieur du cercle c de rayon r décrit autour du point $w = 0$ comme centre, qui renferme toute la partie de l'axe réel située à gauche du point P et qui admet un contour infini γ, passant par le point P et symétrique par rapport à l'axe réel. C'est d'ailleurs le seul contour du domaine Δ, lequel comprend ainsi toute la partie infinie du plan située à gauche de la courbe γ. En effet, autrement cette partie du plan renfermerait un point où $|f(z)| > r$, et elle devrait alors aussi renfermer un domaine Δ' correspondant à la portion du plan des w extérieure au cercle c. Ce domaine Δ' serait nécessairement infini, puisque $f(z)$ est une fonction entière, et admettrait donc un contour infini sur lequel $|f(z)| = r$ et qui serait distinct de γ.

Or il est facile de voir que la courbe représentée par l'équation $|f(z)| = r$ ou bien

$$e^{2x} - 2e^x \cos y + 1 = r^2(x^2 + y^2)$$

ne saurait avoir deux branches infinies distinctes. En effet on voit d'abord immédiatement que sur une branche infinie de

Digitized by Google

cette courbe x et $|y|$ tendent vers l'infini. D'autre part, en écrivant l'équation précédente sous la forme

$$e^{2x} - 2\,e^{x}\cos y - r^2 x^2 + 1 = r^2 y^2,$$

on constate que la dérivée du premier membre par rapport à x reste positive dès que x dépasse une certaine limite. Cette équation ne saurait donc admettre qu'une seule racine x tendant vers l'infini en même temps que $|y|$, et, par suite, γ est le seul contour du domaine Δ. Notre raisonnement prouve de plus qu'il n'y a qu'un seul domaine infini Δ.

Quel que soit r, l'équation $f(z) = 0$ admet à l'intérieur de Δ une infinité de racines, puisque $f(z)$ s'annule pour $z = 2n\pi i$, $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, et $\varphi_\Delta(w)$ admet donc une infinité de branches qui sont finies pour $w = 0$. D'autre part, l'élément de $\varphi_\Delta(w)$ qui correspond à une valeur réelle de z tend vers l'infini si on le prolonge vers le point $w = 0$ suivant l'axe réel. Donc $w = 0$ est pour $\varphi_\Delta(w)$ un point transcendant directement et indirectement critique.

Si l'on prend r suffisamment grand, le domaine Δ renferme tout l'axe imaginaire, et par suite tous les zéros de $f(z)$. La partie du plan des z située à droite de la courbe γ constitue alors un domaine Δ', correspondant à l'extérieur du cercle c. S'il y avait, en effet, dans cette partie du plan un point où $|f(z)| < r$, ce point ferait partie d'un domaine Δ, qui ne saurait être fini puisqu'à son intérieur l'équation $f(z) = 0$ est dépourvue de racines. Mais nous avons vu qu'il ne peut pas exister deux domaines infinis Δ. Donc le domaine en question est bien un domaine Δ'. Puisqu'il présente un seul contour et que la fonction $f(z)$ ne prend jamais la valeur ∞, le point $w = \infty$ est pour $\varphi(w)$ un point transcendant directement critique de première espèce.

Les points critiques algébriques $w^{(\nu)}$ de $\varphi(w)$ sont donnés par les équations

$$f'(z^{(\nu)}) = \frac{z^{(\nu)}\,e^{z^{(\nu)}} - e^{z^{(\nu)}} + 1}{(z^{(\nu)})^2} = 0, \quad w^{(\nu)} = \frac{e^{z^{(\nu)}} - 1}{z^{(\nu)}}$$

ou bien

Digitized by Google

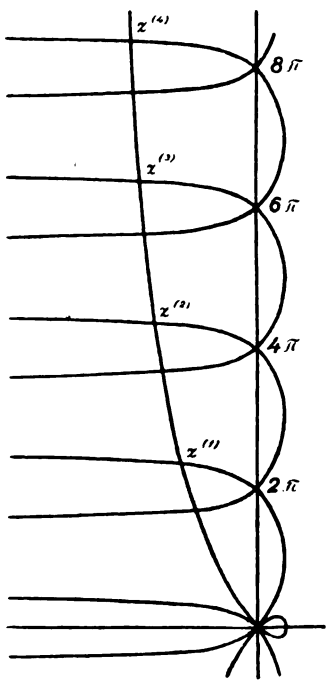
(21) $$e^{z^{(\nu)}} = \frac{1}{1 - z^{(\nu)}}, \quad w^{(\nu)} = e^{z^{(\nu)}}.$$

Des racines de la première des équations (21) on doit toutefois exclure la valeur $z = 0$, puisqu'elle n'annule pas la dérivée $f'(z)$.

Les racines de la première équation (21) sont représentées géométriquement par les points d'intersection des courbes

(22) $$e^{-x} \cos y = 1 - x; \quad e^{-x} \sin y = y.$$

La première de ces équations représente une courbe périodique admettant la période $y = 2\pi$. Elle se compose d'une infinité de branches, provenant l'une de l'autre par un déplacement de 2π parallèlement à l'axe des y. L'une de ces branches est symétrique par rapport à la droite $y = \pi$, qu'elle coupe en un point dont l'abscisse est $x = x_0 = 1.28\ldots$ Cette branche coupe l'axe des y aux points $y = 0$ et $y = 2\pi$, et rencontre toute parallèle à l'axe des x comprise dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2}$ en un seul point, dont l'abscisse, inférieure ou égale à x_0, tend vers $-\infty$ lorsque y tend vers $-\frac{\pi}{2}$ ou vers $\frac{5\pi}{2}$.



Des équations (22) on déduit la suivante

(23) $$y^2 = e^{-2x} - (1 - x)^2$$

qui représente un autre lieu des points $z^{(\nu)}$. Cette nouvelle courbe est symétrique par rapport à l'axe des x et admet l'origine comme un point double, traversé par deux branches qui s'étendent à l'infini à gauche de l'axe des y, et qui forment, entre les droites $x = 0$ et $x = x_0 = 1.28\ldots$ une boucle fermée. Sur les arcs de cette courbe situés à gauche de l'axe des y, $|y|$ croît constamment lorsque x varie de 0 à $-\infty$.

Digitized by Google

Les deux courbes que nous venons de construire se coupent en une infinité de points qui sont situés symétriquement par rapport à l'axe des x. Nous pouvons donc nous borner aux points d'intersection du demi-plan supérieur. Tout intervalle $n\pi < y \leq (n+1)\pi$ en renferme un, sauf l'intervalle $0 < y < \pi$ qui n'en renferme aucun. Parmi les points d'intersection on doit supprimer, outre l'origine, les points compris dans les bandes $(2n-1)\pi < y < 2n\pi$, puisque ces points ne vérifient pas la seconde des équations (22). Les coordonnées des points restants, compris respectivement dans les intervalles $2n\pi < y \leq (2n+1)\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$, satisfont aux deux équations (22) et nous donnent par suite les zéros de $f'(z)$ situés dans le demi-plan supérieur.

Désignons par $z^{(\nu)} = x^{(\nu)} + iy^{(\nu)}$ celui de ces zéros qui est compris dans la bande $2\nu\pi < y \leq (2\nu+1)\pi$. On voit que, lorsque ν croît, $x^{(\nu)}$ décroît constamment vers $-\infty$ et $y^{(\nu)}$ croît constamment vers $+\infty$. D'ailleurs les $y^{(\nu)}$ se rapprochent de plus en plus des valeurs $y = \left(2\nu + \frac{1}{2}\right)\pi$, de telle manière que la différence $y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}$ reste toujours supérieure à 2π.

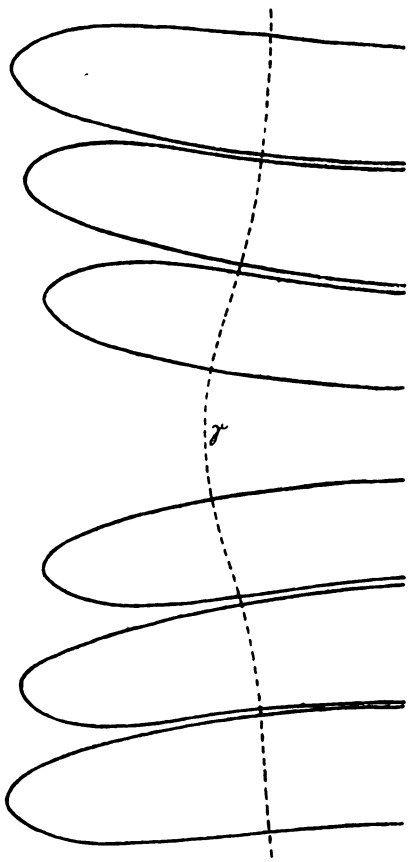
De la relation $w^{(\nu)} = e^{z^{(\nu)}}$ on conclut que les modules des points critiques algébriques $w^{(\nu)}$, correspondant aux points $z^{(\nu)}$ situés au-dessus de l'axe réel, décroissent constamment et tendent vers zéro, tandis que leurs arguments croissent toujours et convergent vers la valeur $\frac{\pi}{2}$. Les autres points algébriques sont évidemment les symétriques des précédents par rapport à l'axe réel, $w^{(-\nu)}$ et $w^{(\nu)}$ étant des valeurs conjuguées.

Si, dans la dérivée seconde $f''(z) = \frac{e^z(z^2 - 2z + 2) - 2}{z^3}$, on pose $z = z^{(\nu)}$, et si à $e^{z^{(\nu)}}$ on substitue la valeur $\frac{1}{1 - z^{(\nu)}}$, prise de la première des équations (21), on obtient $f''(z^{(\nu)}) = \frac{1}{z^{(\nu)}(1 - z^{(\nu)})}$, expression qui est différente de zéro. Donc tout point $w^{(\nu)}$ est critique seulement pour deux branches de la fonction inverse $\varphi(w)$.

Envisageons maintenant une courbe simple qui passe par tous les points $z^{(\nu)}$, par ex. celle qui se compose des deux arcs

Digitized by Google

infinis de la courbe (23) issus de l'origine. L'argument de $f(z)$, qui s'annule à l'origine, tend sur la branche supérieure de cette courbe vers $\frac{\pi}{2}$, sur la branche inférieure vers $-\frac{\pi}{2}$. La portion infinie Σ du plan des z située à gauche de cette courbe est représentée par la fonction $w = f(z)$ sur un domaine S du plan des w limité par une seule courbe passant par tous les points $w^{(\nu)}$. Traçons dans le plan des w une ligne polygonale L dont les sommets successifs se confondent avec les points $\ldots, w^{(-1)}, w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$. D'après ce qui a été dit concernant ces points, l'argument de w varie sur la ligne L toujours dans le même sens. Si alors on prolonge l'élément de $\varphi(w)$, qui prend une valeur réelle au point d'intersection du segment $w^{(-1)} w^{(1)}$ de la ligne L avec l'axe réel suivant cette ligne dans l'un et l'autre sens, en contournant les points $w^{(\nu)}$ par des arcs infiniment petits tournant leur convexité vers l'origine, le point $z = \varphi(w)$ décrit un chemin A à deux branches infinies, qui, en vertu de la correspondance conforme des domaines Σ et S, passe par tous les points $z^{(\nu)}$.



Cela dit, pour former les domaines δ_n, nous avons à construire les lignes σ correspondant aux segments s qui joignent les points $w^{(\nu)}$ à la circonférence c (*cf.* p. 33). Nous ferons voir que chaque domaine δ_n est limité par une seule ligne σ et par suite par un seul segment de γ. En effet, dans le cas contraire il existerait une ligne σ, soit σ', telle que le domaine fini limité par

Digitized by Google

cette ligne et un segment de γ renfermerait une autre ligne σ et, par suite, un segment de la courbe Δ considérée plus haut. La ligne σ' devrait donc rencontrer cette courbe en deux points au moins, ce qui est impossible puisque sur Δ l'argument de $f(z)$ ne prend aucune valeur plus d'une fois, tandis que sur σ' l'argument de $f(z)$ est constant. Chaque domaine δ_n est donc limité par une seule ligne σ et par un segment de γ.

Les domaines δ_n ne remplissent pas complètement le domaine Δ. La portion restante forme un domaine connexe $\bar{\Delta}$ limité par un seul contour. En vertu d'une remarque faite au n° 16 (p. 36), $\bar{\Delta}$ ne contient donc à son intérieur aucun point $z^{(\nu)}$.

L'intérieur de $\bar{\Delta}$ est représenté par la fonction $w = f(z)$ sur la moitié du cercle c située à droite de l'axe imaginaire, découpée suivant chacun des segments s. Le domaine $\bar{\Delta}$ est donc bien un des domaines $\bar{\delta}_n$ définis au n° 16.

Ce que nous venons de dire subsiste pour toute valeur r, et nous sommes donc en état de construire la surface F de Riemann relative à la fonction inverse $\varphi(w)$. Partons pour cela d'un feuillet $\bar{f}$ étendu sur le demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire. Marquons dans ce feuillet les points $w^{(\nu)}$, et menons de chacun de ces points une coupure jusqu'à l'infini suivant le rayon issu de l'origine. Prenons ensuite un nombre infini d'autres feuillets couvrant tout le plan, dont chacun est muni d'une de ces coupures et d'une seule, et raccordons chacun de ces feuillets à $\bar{f}$ suivant les deux bords de leur coupure commune. La surface ainsi construite est précisément la surface F.

Considérons dans le plan des w un contour fermé entourant l'origine. Si le point w, partant d'un point w_0 de la surface F, décrit ce contour, il ne reviendra à son point de départ que s'il n'aura traversé aucune ligne de passage. Dans tout autre cas, et, en particulier, si le point w_0 se trouve dans le feuillet f, le point w traverse une infinité de feuillets, en parcourant alternativement le feuillet f et un feuillet à une seule coupure.

On observera encore qu'un élément de $\varphi(w)$, prolongé vers $w = 0$ suivant le rayon, ne tend vers l'infini que si le point de départ se trouve dans le feuillet $\bar{f}$. En particulier, un élé-

Digitized by Google

ment de $\varphi(w)$ converge toujours vers une valeur finie si w tend vers zéro par des valeurs comprises dans la moitié du plan située à gauche de l'axe imaginaire.

26. Comme second exemple traitons la fonction entière [1])

$$w = f(z) = e^z (1 + i - e^{iz}).$$

Puisque cette fonction tend vers l'infini sur l'axe réel positif et vers zéro dans la direction opposée, $w = \infty$ et $w = 0$ sont des points transcendants pour la fonction inverse $z = \varphi(w)$.

Les points critiques algébriques $w^{(\nu)}$ de $\varphi(w)$ sont donnés par les équations

$$f'(z^{(\nu)}) = (1 + i)\, e^{z^{(\nu)}} (1 - e^{iz^{(\nu)}}) = 0, \quad w^{(\nu)} = e^{z^{(\nu)}} (1 + i - e^{iz^{(\nu)}}),$$

d'où il suit

$$z^{(\nu)} = 2\nu\pi, \quad w^{(\nu)} = ie^{2\nu\pi}, \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Les points $w^{(\nu)}$ se trouvent donc tous sur l'axe imaginaire positif, et admettent $w = 0$ et $w = \infty$ comme points-limites.

Puisque la dérivée $f''(z) = (1 + i)\, e^z (1 - (1 + i)\, e^{iz})$ prend pour $z = z^{(\nu)}$ la valeur $(1 - i)\, e^{2\nu\pi}$ qui est distincte de zéro, il se permute autour de tout point $w^{(\nu)}$ deux branches seulement de $\varphi(w)$.

Pour la division de $\varphi(w)$ en branches uniformes, nous aurons à considérer la courbe du plan des z sur laquelle s'évanouit la partie réelle de $f(z)$. En posant $z = x + iy$, $w = u + iv$ on trouve

$$(24) \qquad \begin{aligned} u &= e^x [(\cos y - \sin y) - e^{-y} \cos (x + y)], \\ v &= e^x [(\cos y + \sin y) - e^{-y} \sin (x + y)]. \end{aligned}$$

La courbe considérée est donc représentée par l'équation

$$(25) \qquad \cos (x + y) = e^y (\cos y - \sin y),$$

d'où l'on conclut qu'elle admet par rapport à x la période 2π. Par tout zéro de $f(z)$, c'est-à-dire par chacun des points

[1]) Cette fonction se déduit de la fonction entière

$$w = \lambda e^{\frac{2+\lambda}{\lambda} iz} \cos z - i(2 + \lambda)\, e^{\frac{2+\lambda}{\lambda} iz} \sin z = e^{\frac{2iz}{\lambda}} (1 + \lambda - e^{2iz}),$$

qui a été considérée par M. Boutroux à différentes réprises (*Leçons etc.*, p. 77 et *Sur l'indétermination etc.*, p. 333), en y faisant $\lambda = i$ et en remplaçant z par $\frac{z}{2}$.

Digitized by Google

$$z = \frac{\pi}{4} - i\frac{\log 2}{2} + 2n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

passe une branche de cette courbe. Ses seuls points multiples sont les points $z^{(\nu)}$, dont chacun est traversé par deux branches. D'ailleurs la courbe (25) ne peut présenter aucune branche fermée, et, sur chacun de ses segments qui ne renferme aucun point $z^{(\nu)}$, la partie imaginaire de $f(z)$ varie toujours dans le même sens.

La courbe (25) coupe l'axe des y aux points dont les ordonnées vérifient l'équation

$$\operatorname{tang} y = 1 - e^{-y}.$$

Chacun des intervalles $n\pi < y < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ comprend un de ces points d'intersection, lesquels se rapprochent de plus en plus des points $y = \frac{\pi}{4} + n\pi$, tandis que les intervalles $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < y \leqq n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ n'en comprennent aucun. Comme d'ailleurs l'équation (25) n'est vérifiée pour aucune valeur x si $y = h\frac{\pi}{2}$ $(h = 1, 2, \ldots)$, on en conclut que chacune des bandes infinies $n\pi < y < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $(n = 1, 2, \ldots)$ renferme une branche et une seule σ'_n de la courbe (25) qui s'étend à l'infini dans les deux directions, tandis que les bandes $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < y \leqq n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ne renferment aucune branche de cette courbe. Il résulte de la dernière équation (24) que la fonction $f(z)$ varie sur σ'_{2n} de 0 à $+i\infty$, et sur σ'_{2n-1} de 0 à $-i\infty$, lorsque z parcourt ces branches de gauche à droite.

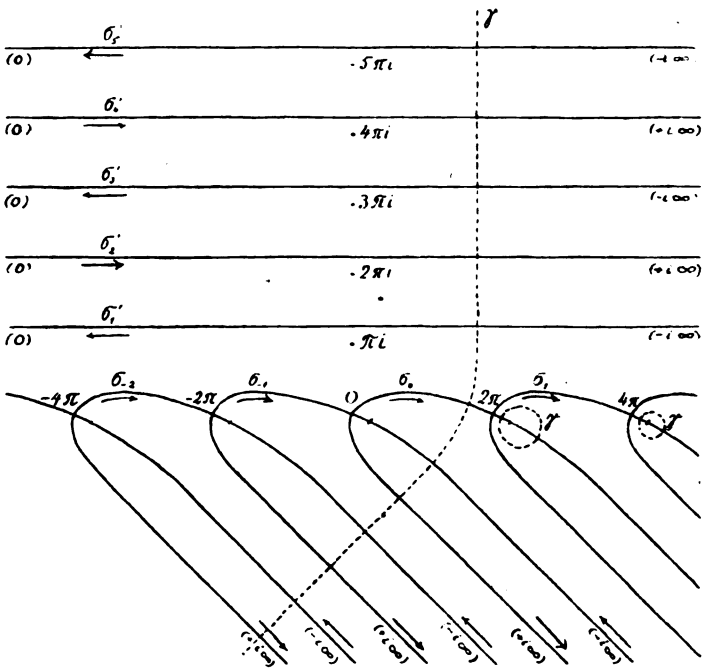
Pour étudier les branches de la courbe (25) situées au-dessous de la droite $y = \frac{\pi}{2}$, cherchons d'abord leurs points d'intersection avec les droites $x + y = h\pi$ $(h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les ordonnées de ces points vérifient l'équation

$$\cos y - \sin y = (-1)^h e^{-y}.$$

Pour une valeur paire de h, celle-ci n'admet que la racine double

Digitized by Google

$y=0$, et, pour h impaire, elle admet une seule racine simple $y=y_0=1.03\ldots<\frac{\pi}{2}$. Cette valeur y_0 est d'ailleurs la plus grande valeur que saurait prendre y sur les branches considérées de



la courbe (25). D'autre part, si l'on donne à y la valeur $-2k\pi$, k étant un entier positif, les abscisses des points correspondants de cette courbe vérifient l'équation $\cos x = e^{-2k\pi}$. On en conclut que de chacun des points $z^{(\nu)}=2\nu\pi$ partent deux arcs infinis de la courbe (25), situés dans le demi-plan inférieur et compris respectivement dans les bandes $(2\nu-1)\pi<x+y<2\nu\pi$ et $2\nu\pi\leq x+y<(2\nu+1)\pi$, et s'approchant respectivement des droites $x+y=\left(2\nu-\frac{1}{2}\right)\pi$ et $x+y=\left(2\nu+\frac{1}{2}\right)\pi$. Le dernier de ces arcs renferme le zéro $\frac{\pi}{4}-i\frac{\log 2}{2}+2\nu\pi$ de $f(z)$. D'autre part, deux points consécutifs $z^{(\nu)}$ et $z^{(\nu+1)}$ sont reliés par un arc fini de la courbe (25) compris dans la bande $0\leq y<y_0$.

Digitized by Google

Nous désignerons par σ_0 la branche de la courbe (25) qui se compose de l'arc qui relie les points $z^{(0)} = 0$ et $z^{(1)} = 2\pi$ et des deux arcs infinis compris respectivement dans les bandes $-\pi < x + y \leq 0$ et $2\pi < x + y < 3\pi$. Les autres branches σ_n de cette courbe qui sont situées au-dessous de la droite $y = \frac{\pi}{2}$ se déduisent de σ_0 par une translation de $2n\pi$ parallèment à l'axe des x.

De la dernière des équations (24) il suit que la fonction $f(z)$ tend sur la branche gauche de toute courbe σ_n vers $+i\infty$, sur la branche droite vers $-i\infty$. Sur l'arc de σ_n situé au-dessus de l'axe réel, v est positive et croît constamment lorsque z parcourt cet arc de gauche à droite.

Dans la figure ci-dessus nous avons esquissé les courbes σ'_n et σ_n, en y indiquant par des flèches les directions dans lesquelles v va en croissant, ainsi que, entre parenthèses, les valeurs-limites de $f(z)$ sur ces courbes. Les zéros de $f(z)$ y sont également marqués.

Nous ferons maintenant voir que $f(z)$ n'admet outre 0 et ∞ aucune valeur asymptotique. La forme de la courbe (25) nous montre d'abord que, s'il y a un chemin allant à l'infini sur lequel $f(z)$ tend vers une limite distincte de 0 et ∞, ce chemin doit s'éloigner indéfiniment de l'axe des y, car autrement il couperait une infinité de branches de cette courbe, et l'argument de $f(z)$ ne saurait donc tendre vers une limite finie. Or il résulte de l'inégalité

$$|f(z)| < e^x\left(\sqrt{2} + e^{-y}\right)$$

que, si le chemin considéré s'étend à l'infini dans le demi-plan gauche, son ordonnée y doit décroître indéfiniment, de sorte qu'il couperait encore une infinité de branches σ_n. D'autre part, l'inégalité

$$|f(z)| > e^x\left|\sqrt{2} - e^{-y}\right|$$

montre que le chemin en question, s'il tend à l'infini dans le demi-plan droit, doit s'approcher indéfiniment de la droite $y = -\frac{\log 2}{2}$. Mais la fonction $f(z) = e^z(1 + i - e^{iz})$ ne peut pas

Digitized by Google

rester bornée sur un tel chemin. Donc cette fonction n'admet que les valeurs asymptotiques 0 et ∞, qui sont par suite les seuls points transcendants de $\varphi(w)$.

De ce qui précède on conclut qu'à la circonférence d'un cercle c de rayon r ayant $w=0$ comme centre, il correspond, dans le plan des z, une courbe γ et une seule qui est infinie, et d'autre part une infinité de courbes fermées γ, situées à droite de la première et renfermant chacune un seul zéro de $f(z)$. Dans la figure ci-dessus nous avons marqué les courbes γ par des lignes pointillées.

La portion infinie du plan des z située à gauche de la courbe infinie γ constitue un domaine Δ correspondant à l'intérieur du cercle c, de même que tout domaine fini limité par un contour γ fermé. La partie infinie restante du plan des z forme donc un seul domaine Δ' correspondant à l'extérieur de c.

Le point transcendant $w=\infty$ est un point directement critique, puisque la fonction $f(z)$ ne prend jamais la valeur $w=\infty$. Comme le domaine Δ' admet, quel que soit r, une infinité de contours, ce point est de seconde espèce.

A l'intérieur du domaine infini Δ, l'équation $f(z)=0$ présente une infinité de racines. D'autre part, l'élément de $\varphi_\Delta(w)$ correspondant à un point d'une courbe σ_n' tend vers l'infini, si on le prolonge vers $w=0$ suivant l'axe imaginaire. Il s'ensuit donc que $w=0$ est un point transcendant directement et indirectement critique.

La construction des domaines δ_n compris dans le domaine infini Δ s'effectuera maintenant sans difficulté. Puisque les points $w^{(\nu)}$ sont tous situés sur l'axe imaginaire positif, les coupures s (*cf.* p. 33) font partie de cet axe, et les lignes σ correspondantes sont donc constituées par certains arcs des courbes σ_n considérées plus haut. De toute courbe σ_n on doit supprimer la branche droite située au delà du point $2(n+1)\pi$, puisque sur cette branche la partie imaginaire de $f(z)$ est inférieure à sa valeur au point $2(n+1)\pi$. Les domaines δ_n sont donc contigus deux à deux, et chacun d'eux est représenté par la fonction $w=f(z)$ sur l'intérieur du cercle c muni d'une seule coupure.

Digitized by Google

Les domaines δ_n laissent découverte une portion infinie $\bar{\Delta}$ de Δ, limitée par un seul contour et ne renfermant intérieurement aucun point $z^{(\nu)}$. Pour diviser $\bar{\Delta}$ en domaines $\bar{\delta}_n$ et $\bar{\bar{\delta}}_n$ (*cf.* p. 37), traçons le rayon $\bar{r}$ suivant l'axe imaginaire négatif. Les lignes correspondantes $\bar{\varrho}$ du plan des z se confondènt alors avec les arcs des branches σ'_{2n-1} $(n = 1, 2, \ldots)$ compris dans Δ. Des domaines ainsi obtenus l'inférieur est un domaine $\bar{\delta}$, qui est représenté par $w = f(z)$ sur la moitié du cercle c située à gauche de l'axe imaginaire, tandis que tous les autres sont des domaines $\bar{\delta}_n$ correspondant au cercle c découpé suivant l'axe imaginaire négatif.

Puisque tout ce qui précède subsiste quelque grand que soit r, nous sommes donc en état de construire la surface F de Riemann correspondant à la fonction inverse $\varphi(w)$.

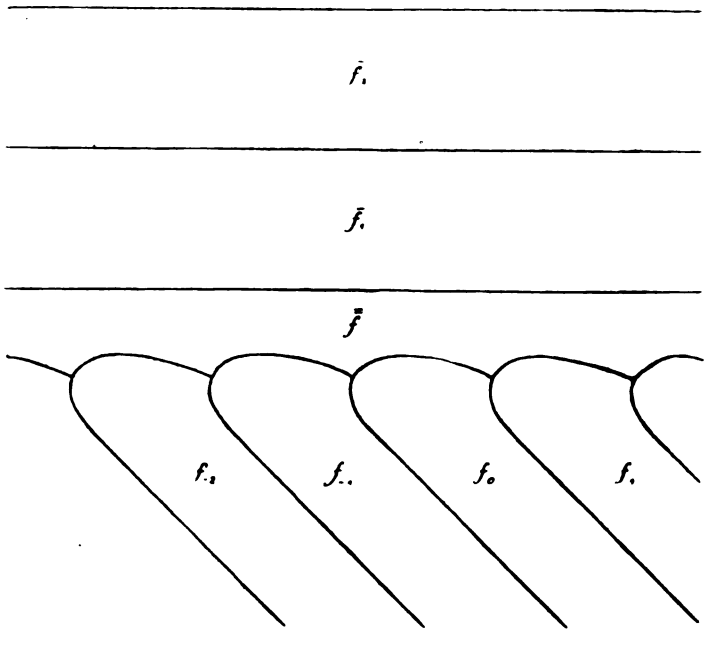
Choisissons un feuillet $\bar{f}$ étendu sur le demi-plan situé à gauche de l'axe imaginaire, et d'autre part un nombre infini de feuillets identiques, $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n, \ldots$, formés du plan des w tout entier, découpé suivant l'axe imaginaire négatif. Ces feuillets seront reliés entre eux de telle sorte que le bord gauche de la coupure de $\bar{f}_n$ se rattache toujours au bord droit de la coupure de $\bar{f}_{n+1}$, le bord droit de la coupure de $\bar{f}_1$ étant raccordé au feuillet $\bar{\bar{f}}$.

Divisons ensuite l'axe imaginaire positif en un nombre illimité de segments finis, $\ldots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ étant limité par les points $ie^{2n\pi}$ et $ie^{2(n+1)\pi}$, et prenons une suite infinie de feuillets $\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots$ dont chacun couvre tout le plan des w. Découpons enfin chaque feuillet f_n suivant l'axe imaginaire positif depuis $ie^{2n\pi}$ à l'infini, et raccordons f_n suivant le bord gauche de cette coupure au bord opposé du feuillet f_{n-1}, tandis que, du bord droit de la coupure de f_n, le segment s_n sera raccordé au feuillet f et la portion infinie restante au bord gauche de f_{n+1}.

Pour faciliter l'intelligence de cette construction de la surface F, nous reproduisons ci-dessous pour $r = \infty$ la division du plan des z en domaines δ, $\bar{\delta}$ et $\bar{\bar{\delta}}$, en indiquant pour chaque domaine le feuillet correspondant de la surface F.

Digitized by Google

Considérons un contour fermé entourant le point $w = 0$, par ex. un cercle c de rayon r décrit autour de ce point comme centre. Soit w_0 un point de cette circonférence situé dans le feuillet f_n de la surface F. Si $r < e^{2n\pi}$, le point w reviendra à son point



de départ sur F après avoir accompli un tour de c dans un sens quelconque. Si au contraire $r > e^{2n\pi}$, et si n_1 désigne l'entier qui satisfait à la condition [1]) $e^{2n_1\pi} < r_1 < e^{2(n_1+1)\pi}$, le point w traversera successivement les feuillets $f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n_1}, \bar{\bar{f}}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots$ s'il parcourt le cercle c dans le sens direct, tandis qu'il traversera les feuillets $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_0, f_1, f_2, \ldots$ si le sens de son mouvement est indirect. Dans les deux cas il traversera donc une infinité de feuillets distincts, mais tandis que dans le premier cas les branches successives de $\varphi(w)$, à partir d'une certaine d'entre elles, se permutent autour de $w = 0$ comme autour d'un point de ramification d'ordre infini ou point logarith-

[1]) L'égalité doit évidemment être exclue.

Digitized by Google

mique, on ne rencontrera dans le second cas que des branches qui sont régulières au point $w = 0$, et qui se permutent autour d'une infinité de points critiques algébriques situés dans son voisinage.

Un fait analogue se présente si le point w_0 se trouve dans l'un des feuillets $\bar{f}_n$; toutefois, dans ce cas, le chemin en question ne se ferme jamais sur la surface F.

Digitized by Google

Digitized by Google